QUADRATURA CIRCULI, ET HYPERBOLÆ

Per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas Quadrabiles Geometricè exhibita, & demonstrata.

EDITIO ALTERA AUCTIOR, ET ACCURATIOR

In qua, præter alia multa, ad veterem Appendicem de Rectificatione Curvarum, altera accessit de earundem, & Curvilineorum Spatiorum Transformatione infinitis modis expedienda.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO

Monacho Camaldulensi, in Pisana Universitate Publ. Phil. Professore Reg. Cels. M. D. Etruriæ Theologo, & Mathematico, Et Regiæ Societatis Sodali.

AD SERENISSIMUM PRINCIPEM

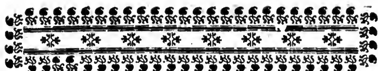
JOANNEM GASTONEM AB ETRURIA.





PISIS, MDCCX.

Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiep. *Superiorum permissu.*



SERENISSIMO PRINCIPI

D. JOANNI GASTONI MEDICEO

Pisanæ Universitatis Patrono Amplissimo

GUIDO GRANDUS FELICITATEM.



Esperata erat superioris ævi Geometris, quæ per tot sæcula irrito labore quæsita fuerat, Circuli & Hyperbolæ Quadratura: cùm tandem, felicibus ausis, recentiores Mathematici, novis methodis hujus Scientiæ pomæria in immensùm ampliare tentantes, repagulum hoc progressibus suis oppositum removere conati, ab ipsomet Infinito suppetias implorarunt. Vix ad ejus efficacissimæ potentiæ familiarem consuetudinem admissi erant, cùm se ad desideratam votorum metam perductos tandem agnoverunt: statim enim patuit, frustra inter finitorum terminorum angustias hactenus investigatum fuisse, quod

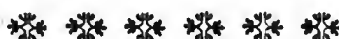
unicè in ipsiusmet Infiniti vasto, & profundo sinu latebat. Scilicet, quemadmodum alia Problemata, suapte natura, plana sunt, alia solida, quædam etiam superioris, sed tamen finiti, gradus, ut propterea, quæ primi generis sunt, per solas simplices lineas, rectam, & circularem, in plano ortum habentes, expediri queant, quæ ad secundam classem pertinent per conicas sectiones, è solidorum superficie progenitas, resolvi debeant, quæ denique in tertia sunt differentia, lineas magis compositas, sive altioris gradus, ad sui enodationem requirant: ita ea est Circuli, & Hyperbolæ indoles, ut dimensio utriusque nonnisi per infinitam seriem quadrabilium terminorum tractari possit, nullaque geometrica linea, quantumvis elevati ordinis, & per æquationem quotlibet dimensionum exprimenda, se definiri patiatur. Hoc admirabile Quadraturæ genus, cùm per sese elegantissimum sit, & ad praxim etiam, aproximatione quamlibuerit exacta, satis accomodatum, per ambages tamen, & mysteria dumtaxat analyticarum expressionum, à summis Viris propositum fuerat, unde pleniorem, clarioremque geometricam demonstrationem adhuc desiderare videbatur. Quod cùm ego ante septennium præstiterim, tuoque Augusto Nomini, Serenissime Princeps, libellum de hoc argumento editum consecraverim, placuit nunc eundem in ampliorem, & commodiorem formam redactum, tuis iterum oculis sistere, ac potentissimo Patrocinio tuo secundam hanc editionem pariter communire. Hanc tum figuræ suis locis resti-

restitutæ, tum plurima de novo addita, vel uberiùs illustrata commendant: inter quæ, tum à Cl. V. Renato des Cartes proposita Circuli quadratura, per infinitam rectangulorum seriem procedens, in posthumis ejus operibus, post primam mei libelli editionem, publicata, à me demonstratur, aliæque tum Circuli, tum Hyperbolæ quadraturæ nostræ, per infinitas rationes componentes determinatæ, adiectæ sunt, ac denique Appendix altera accessit de Transformatione curvarum linearum, & superficierum in alias æquales infinitis modis perficienda, quam XX Theorematibus maximè generalibus comprehendi. Præcipuum tamen totius operis decus, & ornamentum ex amplissimæ Protectionis tuę honore, Princeps Serenissime, dimanat, qui pro tua benignitate, & sapientia, meos ad promovendam Geometriam conatus excipere, fovere, probare non dedignaris, ut, dum hujus sublimissimæ Scientiæ studia tibi in pretio, & deliciis esse demonstras, eadem à calumniis, & detractionibus malè feriatorum hominum tua vindices auctoritate, eorumque cultum, universæ Reipublicæ adeò profuturum, tuo et exemplo commendes, & præsidio confirmes. Vale.



AD

AD EUNDEM
SERENISSIMUM
PRINCIPEM
PRIORIS EDITIONIS NUNCUPATIO.

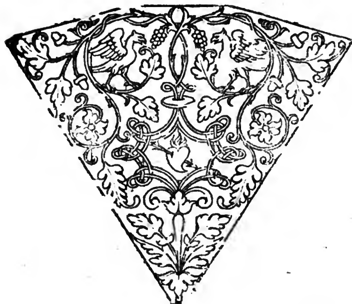




Liber, Etrusci quò te Spes Alterà Regni,
Et MEDICUM Stirpis Gloria GASTO vocat.
Sive illum invenias, Naturæ arcana moventem,
Complecti veteres mente, novosque Sophos,
Sive Syracusii, Pergæive arte Magistri
Conica regali ducere signa manu,
Seu Divina Sacræ versantem Dogmata Legis,
Et Fidei fastos, ac monumenta Patrum,
Magni Animi Genium pro me venerare, meique
Obsequii per te Pignus habere jube.
Hinc memora, ut discant quadrato limite claudi
Cyclus, & excessus Sectio nomen habens,
Implicet innumeras quamvis mensura figuras,
Non definitis significanda notis.
Idem Æquus Judex, Mœcenas Optimus idem
Lecto operi laudem, Præsidiumque dabit
Ejus & Auspiciis tibi mox sperare licebit,
Et Famam, & quidquid non tuus Auctor habet.

Ibis

Ibis ab invidiæ ſaltem diſcrimine purus,
Nec, Tanto illuſtris Nomine, vilis eris,
Nam licèt hæc tractes, quæ vulgo incognita riſum,
Contemptumue rudi à plebe referre ſolent,
Atque aliquis te Rhetoricas quadrare Figuras,
In primo frontis limine, crediderit,
Tanta ſciendarum tenet ignorantia rerum
Quos apinæ, & tricæ paſcere ſæpe ſolent!
Cum tamen à Magno te quis GASTONE *probari*
Audiet, aut tantùm promeruiſſe legi,
Nonnihil abiecto ſub cortice ineſſe putabit,
Et Pretium Tanti Principis addet Amor.



TY-

Typographus Lectori.

AB Auctoris Amico nonnulla collecta fuerant Clarissimorum Virorum honorifica Testimonia, quæ ut pridèm edita opera Mathematica Patris Grandi, tanquam profundissima, & maximè ingeniosa, summoque cum Legentium fructu evoluenda, eximiè celebrant; ita hoc ipsum Opusculum Geometricum, velut dignum ejusdem Mentis fœtum opportunè commendassent. Sed, renuente Auctoris modestia, ut quidpiam in ejus Laudem, vel ex Actis Lypsiensibus, vel ex Ephemeridibus Parisiensium, aut Trevoltiensium, vel ex aliis Celeberrimis Mathematicis, Italis, Gallis, Anglis, Germanis, qui tùm in Operibus editis, tùm in Epistolis ad Varios scriptis, ejus cum Elogio meminerunt, hoc loco exscriberetur, ejus jussibus obsequendum, ejusque genio indulgendum fuit. Quia tamen in ejusdem Amici manus Exemplar venerat elegantium Carminum, quæ Vir piæ, & claræ Memoriæ Pater Franciscus Adami, in Geometricis, & Algebraicis studiis apprimè versatus, ad ipsum Auctorem nostrum de hoc Opusculo scripserat, eadem nullatenus prætermittenda esse duxit, atque hicomnino, cum bona Auctoris nostri venia, inserenda jussit. Occasio ipsa scribendi hæc fuit. Miserat Auctor eidem Patri Adamo Anno 1703. Libellum hunc suum de Circuli, & Hyperbolæ Quadratura per infinitas Hyperbolas, & Parabolas, meis Typis tùnc editum, additâ hac Epigraphe Catulliana, quæ in nomine *Adami* luderet:

Cui dono lepidum novum Libellum?
Primo nempe Hominum, Patrumque Primo.

Statim itaq. perlecto avidissimè ex more Libro, P. Adamus sequenti Ode respondit.

ADMODUM REVERENDO PATRI D. GUIDONI GRANDO

Monacho Camaldulensi, Fr. *Franciscus Antonius Adamius Minorita*. S. P. D.

GEometrarum Maxime, Maxime
Guido Sophorum, Maxime Rhetorum,
Ter maximum jam promereris,
Nec satis est tibi GRANDE nomen.

Unius & Trini hoc Decus unicè,
Sed qui suis dat se, & sua, nec minor
Evadit, hac nil diminutus,
Te voluit decorare Laude.

Hic cuncta rerum scire recondita,
Hic Scita scito promere famine,
Metiri hic Immensum, deditque
Innumeras numerare partes.

Æquare curvos hic quoque fornices,
Hic & quadratos reddere Circulos,
Interminatum terminare,
Rectificare dedit retortum.

In se stupendum Conica sectio
Quidquid recondit, quidquid & omnibus
Secantium infinitus Ordo,
Iste tibi referat Magister.

Novum Libellum *nunc* lepidum *mihi*,
Qui mille miras tractat Hyperbolas:
Fideque salva Veritatis
Mille docet Paradoxa, donas.

At quòd Virorum *me simul*, & Patrum
Primum *vocaris, fallit Hyperbole.*
Ne fallat, id tam grande sumo
Nomen ego, Tibi rem relinquo.

Nunc pro recepto munere gratias
Referre grati Pectoris impedit
Durare Vinclum semper optans,
Ergo habeo, nisi reddo grates.

Valc. Fivizzani. Tertio Kal. Augusti 1703.

AD

AD LECTOREM

PRÆFATIO.



X omnibus Conicis Sectionibus, curva aliqua circumseptis solam Paraboleن, Magni Archimedis industria, ad quadratos, seu rectilineos fines redactam accepimus, idque duplici via, quarum postremam jure meritoque inscriberes *Quadraturā Parabolæ per Infinita Triangula*, eò siquidem rem deducit Divinus ille Geometra, ut Parabolicum spatium infinitæ seriei Triangulorum in quadrupla ratione decrescentium æquale demonstret, adeòque maximi inscripti epitritum renunciet. Iisdem ego vestigiis insistens analogiam hanc promovere, & ad sectiones alias exporrigere olim decreveram, *Hyperbolæ quidem per infinitas Parabolas, Circuli verò per infinitas Hyperbolas Quadraturam* brevi libello complexus, cui jam deservientes tabulæ primæ figuras, ad priorem editionem, ære incisas habebam, omniaque prælo parata, ac penè commissa reliqueram. Cùm, ecce apud Amicum optimum Celeberrimi viri Nic. Mercatoris Logarithmotechniam offendo, meamque de Hyperbola ad infinitas parabolas traducenda cogitationem, quam mihi primò illuxisse credideram, jamque apud amicos invulgaveram, & in qua præcipuum libelli illius nervum constitueram, ab illo jam præoccupatam invenio; meæ itaque nativitatis moras incusans, de Libelli illius editione ferè desperaveram; Amicis nihilominus aliud suadentibus, & methodi, qua hæc demostraveram, abolitionem penitus non ferentibus, cedendum duxi, actum tamen agere ne viderer, quod tum mihi palmarium fuerat, & principem libelli locum obtinebat, velut minùs præcipuum habere, & tamquam



vul-

vulgatum, e sua sede in calcem libri detrudere coactus fui (quā non servati in prima editione incisarum jam figurarum ordinis causam habes) & præterquàm quod preoccupatæ jam Hyperbolicę Quadraturæ per infinitas Parabolas loco aliam mihi propriā, & in Hugenianis præindicatam substitui ope simplicis Tractorię facillimè exequendā, (quā mihi adhuc integrā manere tunc arbitrabar sed in Actis Lypsię 1693. mox indicatā inveni) nova rursus accessione utramq. Circuli, & Hyperbole Quadraturā cumulavi, illam etiam ad infinitas Parabolas, hanc pariter ad infinitas Hyperbolas traducens, ut jam utroq. modo utraque Sectio dimensionem qualemcunque subiret, largiori etiam deinceps manu in digressiones profusus, brevemque de Curvarum longitudinibus dimentiendis Appendicem adiiciens, cui in hac editione aliam adhuc benè longam De Transformatione curvarum linearum, & superficierum adjunxi, 20. Theorematibus maximè generalibus comprehensam, præter alia multa ad utriusque Spatii Circularis, & Hyperbolici mensuram, infinitis quibusdam progressionibus concludendam, attinentia, quæ suo loco passim inserui, ut in tam varia rerum segete certior esse possem, aliquid saltem antea non animadversum à me proponi. Quamquàm post tot hujus ęvi acutissimos Geometras in argumento præsertim tandiù, & per tot methodos exculto, difficillimum sit non in easdem penitus cogitationes incidere, præcessoribus nostris communes, nec ullius tritas vestigiis semitas recalcare. Monuit olim Philosophus 1. *Methor. tex. 8. Non semel, nec bis, neque rarò easdem opiniones reverti factas in hominibus, sed infinities*. Delirium hoc ad suam de mundi æternitate sententiam facilè consequens, dempta illa infinitatis exaggeratione, Oraculum erit, cujus veritatem, & in dies experimur, & sera posteritas cumulatissimis exemplis aptiùs confirmabit, quandoquidem tot Veterum Philosophorum sententias hac ætate denuò in lucem assertas videmus, & pro novis propositas, quarum non rudia dùmtaxat specimina, sed expressa lineamenta, inter antiqua dogmata à Plutarcho, Seneca, Aristotele, aliisque relata frequenter occurrunt, atque integra, ut suspicor, systemata ferè haberemus, nisi illorum philosophica commentaria nobis Antiquitas invidisset. Licèt autem nullum non moveant lapidem Critici, ut Plagiarii notam propterea in ejusmodi Neophilosophos transferant, quasi inventionis gloriam affectaverint: non video tamen quid obsit, quòminùs & absque prævia Veterum idem sentientium notitia, vel animadversione

in

in eas cogitationes Viri Clarissimi per se venire potuerint; nec facilè adducar, ut credam, quæ omnium oculis prostant, nec ullo ipsorum artificio aboleri poterant, inanis, & paucorum hominum respectu ad non ita multos dies victuræ gloriolæ spe, data opera, Prudentes Viros dissimulare studuisse. Utcunque tamen ea res sit, quæ me nullatenus tangit, certum est, res philosophicas diversis hominum sententiis obnoxias esse, atque ut est hominum varium ingenium, diversas plerumque de iisdem Naturæ effectibus opiniones variorum mentibus innasci, eorumque geniis arridere; quarè & difficiliorem esse in his consensum, nisi alius ab alio acceperit, & formam, quam imitaretur, attenderit, unde illud vulgatissimum: *Faciliùs, quam inter Philosophos, inter Horologia conveniet*. At in Geometricis non facile id modò, sed prorsus necessarium est, & si integræ Mathematicorum diversissimis terrarum locis agentium myriadi (nec enim simul id hominum genus habitare solet, sed hac illac spargi) idem Problema solvendum proposueris, eadem erit, quò ad rem ipsam, omnium solutio, nec fieri poterit, quin multi in methodo, & via solutionis ultrò conveniant; neque alia fortasse causa est, cur plurima in hoc genere à multis præclarissimis Viris, velut nova quandoque edita sint, quæ dudum ab aliis præoccupata jam fuerant.

Nam, ut prætercam lites innumeras, quæ de Cycloidis inventione & mensura, Italos inter & Gallos, exortę sunt, illis Galileo, & Torricellio, his autem Mersenno, & Robervallio hanc gloriam tribuentibus: ut omittam celebrem quoque controversiam, de Algebræ perfectione, quam Galli Cartesio, Angli Hariotto, & Oughtredo vindicare conantur; annon inter Gallos Cl. Mathematicus Petrus de Fermat Curvā Geometricam à se uno ante alios rectificatam, Dissertatione peculiari anno 1660. edita, & inter ejus Opera posthuma anno 1679. iterum impressa professus est, cùm tamen jam anno 1657. Guglielmus Neillius in Anglia, atque anno 1659. Heuratius inter Batavos, edita de hoc argumento Epistola Cartesianæ Geometriæ subnexa, idem præstitissent, & quidem in eadem specie Curvæ, hoc est in Parabola cubica secundi ordinis?

Obstupuit Insignis Geometra Vincentius Viviani, cùm illi apud Pappum Alexandrinum *Mathem. Collect. lib.4. prop. 30.* ostendi, portionem sphericæ superficiei, quadam spirali interceptam, exactæ quadraturæ capacem, quippe dati trianguli octuplam demonstratam extare: nam in libello *De Formicum-*

dimensione Vir Cl. à se primùm portiones curvæ superficiei sphericæ verè quadrabiles assignatas fuisse crediderat. In stuporem pariter adductus esset *Guldinus* celebris Mathematicus Soc. Jesu, siquis ipsi Regulam suam, de via centri gravitatis, qua ducta in magnitudinem genitricem, prodit quantitas figuræ genitæ, apud eundem Pappum *in fine Præf. lib.* 7. non obscurè indicatam ostendisset. Par admiratio *Gregorium* à S. Vincentio ejusdem instituti Socium, atque egregium Geometram subire poterat, si præcipuas doctrinas suas de infinitis geometricæ progressionis terminis, & de ductu plani in planum, anno 1647. editas, jam à Torricellio anno 1644. & à Cavallerio anno 1635. præostensas notasset.

Nonnulli vix adducuntur, ut credant, præclarũ illum Poetam, nostrique *Pisani* Lycei Mathematicum, in Theoremate de momentorum ratione ex ponderum, & distantiarum rationibus composita, cujus inventionis gloriam sibi adscripserat, cùm Galilæo, Cavallerio, Antonio Rocca, Torricellio [à quibus id ante traditum, & usurpatum ostendit Vivianus *In Scien. Univers. Propor.*] ultrò consensisse; cùm tamen id, citra ullam plagii suspicionem, eventu facillimum suadeat obvia cuilibet, ex primis, vulgatisque Mechanicæ principiis, dictæ propositionis deductio. Quidsi intelligerent, totum ejusdem Auctoris argumentum *De Resistentia Solidorum*, quod anno 1669. publici juris fecit, jam antè octo annos à D. Blondello præoccupatum fuisse, qui idem Galilæi sphalma de Solido parabolico æqualis ubique resistentiæ, etiam cùm utrinque fulcitur, prior detexit, & subrogato Solido elliptico emendavit? Editus is liber est in quarto apud Franciscum Clousier in Aula palatii juxta ædes Senatus Principis MDCLXI. sub hoc titulo. *F. B. Epistola ad P. VV. In qua famosa Galilæi propositio discutitur, circa naturam lineæ, qua trabes secari debent, ut sint æqualis ubique resistentiæ: & in qua lineam illam, non quidem parabolicam, ut ipse Galilæus arbitratur est, sed ellipticam esse demonstratur*; neque diverso medio [quod magis mireris] nec admodum variis diagrammatum formis utrinsque demonstratio procedit: Sed & in libro, Regiis Typis anno 1676. Parisiis edito, cui titulus *Recueil de Plusieurs Traictez de Mathematique*, idem Blondelli Tractatus *pag.* 60. recuditur, & scriptus *Farræ Viromandorum pridie idus sextiles anni* 1657. indicatur; tum *pag.* 69. alia ejusdem Epistola in idem argumentum data Parisiis 18. Julii 1661. affertur, ubi se fatetur ante duodecim annos [adeoque anno 1649. ideft 20. annis

nis ante *Mathematici* nostri librum] elaborasse volumen de Resistentia solidorum, eique titulum addidisse *Galilaeus Promotus* (quod rursus coincidit cum titulo, quem noster Mathematicus libro suo olim praefigendum fuisse *in praef.* monet, *Galilaeus ampliatus*) ea ipsamet ejus verba, quae rescribere non piget, ob insigne, quod referunt, Gassendi de Galileo Elogium: *Ayant pour ce sujet composé le livre, que vous avez veu prest à estre donné au public il y a plus de douze ans, que j'appelle* Galileus Promotus de Resistentia Solidorum, *& qui pourtant quelque jour estre mis en lumiere, fera assez connoistre ma reconnoissance, & le respect, que je porte à la memoire de ce grand homme, que nostra bon Amy M. Gassendi appelloit ordinairement le Platon de nostre Siecle.*

An referam, Celeberrimum Tschyrnhausium *in Actis Lypsiae* 1686. pro nova Curva areae quadrabilis proposuisse eam, quae nihil aliud est, quàm Ungula cylindrica expansa, dudum à Vallisio, Fabrio, & Stephano de Angelis considerata; necnon *in Actis anni* 1687. partes Lunulae Hypocraticae quadrabiles, velut rem Geometris nondum animadversam, assignasse, & quidem eadem methodo, & constructione, qua D. Artusius De Lionne jam inde ab anno 1654. in sua amaena Curvilineorum contemplatione idem expedierat? An observem, *in iisdem Actis anno* 1700. iterum ut novam adduci eandem partium Lunulae Hypocraticae quadraturam à D. Perks propositam in Epistola D. VVallisii ad D. Sloan, cum notis David Gregorii, & Casuelli; eundemque Vallisium jam anno 1670. *in Mechanica part.* 2. *prop.* 31. sibi tribuisse constructionem Cylindroidis hyperbolicae per Tornum faciendam, quam praecedenti anno 1669. *in Transactionibus Philosophicis num.* 48. ediderat Christophorus VVren, Regiae Societatis Collega?

An commemorem Mathematicorum nostri saeculi Principem Leibnitzium, *In Actis Lypsiae* 1685. *Mense Novembris* velut novum Lemma vulgasse, quod centrum gravitatis duorum ponderum, lateribus trianguli, per quae, medio fune, utrumque trahitur, homologè proportionalium, semper in eadem horizontali basi reperitur, quod jam De Chales, aliique Mechanici notaverant, in primis verò Torricellius *lib.* 1. *de Motu gravium prop.* 1. usque ab anno 1644. demonstratum dederat? An notare libeat, quod *anno* 1682. *eorundem Actorum mense Junio* proposuit idem Leibnizius, principium naturae per vias brevissimas operantis, ad legem refractionum applicatum, jam à D. Fermat animadversum fuisse, ut

ex

ex ejus *Operibus Posthumis* anno 1679. editis *pag.* 156. videre licet? An addam mirabilem Leibnitzii Algorithmum infinitè parvorum, five differentialem Calculum, ab eodem circa annum 1684. *in Actis Lypsiæ* propositum, qui vocabulo, & charactere dumtaxat differt à Methodo fluxionum, quam Phenix ingeniorum Isaac Neuuton jam ab anno 1676. in Anglia proposuerat, reipsa verò penitus eidem congruit, iisdemque regulis subditur, eundemque in omnibus præstat effectum?

An adiiciam Clarissimum Geometram Hospitalium, tum multa suis Operibus, ex Magni Bernoullii, & aliorum penu, inseruisse, tum verò integrum Instrumentum ad multisectionem anguli, per modum Circini, quibusdam mobilibus æqualibus regulis insertis, à Doctiss. P. Thoma Ceva Soc. Jesu dudum excogitatum, atque anno 1695. peculiari libello expositum, & anno 1699. inter ejus Opuscula Mathematica recusum, imò & *Actis Lypsiæ* 1695. *Mense Julii* inditum, eadem forma & constructione, atque usu, nulla primi Auctoris mentione facta, *in Tract. Analytico Sect. Con.* anno 1704. *lib.* 10. *probl.* 6. propositum reliquisse, prout anno 1707. Pariliis editum videre licet *pag.* 452. quo etiam in Opere *lib.* 5. *prop.* 13. & 14. idem modus demonstrandi generatim rationem spatii parabolici, aut hyperbolici cujusvis gradus ad circumscriptum, vel inscriptum parallelogrammum, ex harum curvarum subtangentibus deductus visitur, quo ego in Hugenianis anno 1701. impressis *cap.* 8. *n.* 10. & 11. usus eram?

Quid addam de Cl. Parentio, qui anno 1705. *in Disquis. Phys. & Mathem. p.* 3. *pag.* 479. generalem complanationem conicæ superficiei rectæ, per comparationem ad suam ichnographiam in proportione lateris coni ad radium basis designavit: id quod ego jam anno 1698. inveneram, & 1699. inter Vivianea nostra *in Appendice de Fornicibus Conicis* edideram, ac demonstraveram, nescius idem, sub aliis terminis, *in Actis Lipsiæ* 1696. à D. Joanne Bernoullio, sine demonstratione, indicatum fuisse? Quid de Curvis ex subtangentium ad ordinatas applicatione ortis [quas ego in Hugenianis Correlatas appello] primû à Jacobo Gregorio *in Geometriæ Parte universali* publicè propositis, tum inter Robervallii vetustiora scripta repertis, qua de re ingens inter David Gregorium, & Abbatem Gallois controversia de plagii crimine excitata est, *in Monum. Academiæ Regiæ Scient. Paris. anni* 1703. enarrata? Quid de Egregio Geometra Bartholomæo Intieri, qui

anno

anno 1704. in suo *Apollonio Promoto*, Parabolas, Hyperbolas, & Ellipses cujusvis gradus ex totidem Conis novarum specierum secare docet, cùm idem Cl. D. De la Hire anno 1685. *in Appendice sui Operis de Sectionibus Conicis* prestitisset, ut Eruditi Lypsienses *loc. cit.* notarunt? Quid de innumeris id genus aliis exemplis, quæ vel meam notitiam, vel attentionem, vel memoriam subterfugiunt, vel consultò dissimulantur?

Cùm autē, ut VVallisius *Epist. de Cycloide ad Hugen.* animadvertit, nihil inventionis gloriæ præjudicet, quòd quis se ab aliis præoccupatum deprehendat, quia semper *invenisse Acuminis est*, *primum invenisse Fortunæ*, non erit, opinor, qui hæc à me superiùs notata fuisse suspicetur, ut Clarissimorum Virorum inventis quidpiam propterea detraherem, sed unicè, ut facilem hunc in rebus geometricis Consensum pluribus exemplis confirmarem; quibus certè siquis attenderit, mirari desinet, quòd & ipse in Hugenianis Logisticæ proprietatibus demonstrandis, aut cum D. Carrè (ut Lypsienses notant anno 1706.) aut cum P. Nicolas [ut indicant *Parisienses* Collectores anno 1707.] convenerim: cui & illud consequens est, ut in eodem argumento tam D. Carre, quam P. Nicolas coinciderint: quàmquàm in methodo demonstrandi, tum illi inter se, tum ipse ab utroque plurimùm distemus, ut nihil, præter argumenti partem, nobis commune videatur.

Sed quid his immoror? Innumera sunt, quæ, rerum geometricarum contemplationi incumbens, per me ipsum Inveneram, atque inter Adversaria mea retuleram, quæ postmodum à Clarissimis Mathematicis dudum animadversa, & publico jam consignata fuisse deprehendi, atque hæc, aut prorsus suppressi, aut siqua occasione in lucem asserui, non dissimulavi primorum Auctorum Nomina, iis Inventionis Gloriam deferens, quos par erat sua forte gaudere, nec impoiterum dissimulabo, si tale quid ante mearum speculationum editionem animadvertere contigerit; qui autem me, & mea norunt, non adeò curtam mihi suppetere sciunt rerum ejusmodi supellectilem, ut ex alieno censu quidpiam corradere indigeam; otium, & facultates desunt ad propria edenda, tantum abest, ut ab exterorum laboribus mihi vindicatis gloriam expectem. Erunt alià fortasse, tum in hoc, tum in editis antehac opusculis nostris, vel in postmodum edendis, quæ, vel alii Geometræ præindicaverint, vel pleniùs fortè illustraverint, nequè in his ego palmam ulli aut præripere, aut contendere ausim; quid-

quid

quid ad ſe pertinere quis putat, ultrò reſumat, mihi quam quis voluerit partem relinquat, maximo mihi honori erit vel cum Clariſſimis Viris conſenſiſſe, & quas ipſi ſpeculationes è ſecretioribus Analyticæ theſauris eruerint, è communibus propemodum, atque in omnium uſum patentibus *Geometriæ* promptuariis [non tamen ex ſola Cavalleriana Indiviſibilium methodo, ut Pariſienſes *loc. cit.* pronunciare auſi ſunt, ex ſola quorundam diagrammatum ſpecie id ſuſpicantes, ſed ex variis methodis, quæ paſſim diverſæ in ſingulis propemodum capitibus occurrunt, ad legentium utilitatem maximè accomodatis, ut plurium Mathematicorum conſenſu probare poſſem] mihi derivaſſe, rerumque abſtruſiſſimarum facillimas demonſtrationes ad omnium captum, & guſtum accomodaſſe.

Ad omnium captum, inquam, ad omnium guſtum; nec me tamen latet, noſtra à paucis legi, à pleriſque autem vel nimiæ obſcuritatis inſimulari; quod potiori jure in hujus libelli conſpectu exclamabunt, ſi vel analytica ſigna, vel ſeries illæ infinitæ in oculos incurrent, quibus has paginas non raro implere coegit Argumenti, quod hic tractamus, natura. Sed ſpectra ſunt hæc trepidantium timore ubi nullus eſt timor. Quid facilius eſt, quàm per ſignum + additionem quantitatis ſequentis intelligere, per ſignum − ſubtractionem, per notam = æqualitatem, per interpunctionem analogiſmum, per conjunctionem litterarum ipſarum multiplicationem, per ſeparationem verò, aut interpoſitionem lineolæ, diviſionem? Hæc vel vulgaribus Algebriſtis ſatis ſunt familiaria: & ſiquæ alia, præſertim ad calcem libri, nova ſigna uſurpavi, eorum ſignificationem in *Monito pag.* 57. opportunè aperui, & neceſſitatem, ac convenientiam mutandæ notationis aſſignavi, cujus ipſamet comparatio cum notationibus eorundem terminorum in priori editione, ad hoc ſcriptionis genus intelligendũ, plurimum conferet. At differentialis etiam Calculi characteriſticam dx, dy, ejuſdemque differentiandi, & ſummandi modum quandoque inſerui; ita eſt: utinam in præcedentibus etiam opuſculis meis inſerere potuiſſem! at tum ejus methodi arcana mihi erant impervia, nunc ejus uſu, fructuque perſpecto, quidni inter alias mihi familiares methodos & huic locum facerem? Deinde apertiſſima eſt notarum ejuſmodi ſignificatio, cùm nihil niſi ipſius x vel y differentiam infinitè parvam ſignificent. Calculi autem leges ipſas, ſi attentè introſpexeris, atque hunc Tractatum evolveris, data opportunitate expoſitas facilè invenies, niſi à Clariſs. Hoſpitalio

in

in Tractatu *De Infinitè Exiguis* illas pleniùs explicante repetere volueris, vel ex Libello nostro nuper edito *De Infinitis Infinitorum, Infinitèque Parvorum gradibus*, ubi ejus methodi fundamenta, quæ ab aliis supponuntur, à nobis demonstrata invenies. Cæterùm pauca occurrent, quæ alia, quàm planæ Geometriæ Elementorum, & nonnulla Conicorum cognitione indigeant; siquæ verò obscuriora manserint, hæc ipsa per saltus transmissa sequentium lectionem, & intelligentiam non morabuntur. Frequentes, quibus indulgeo, digressiones prima vice omittas omnino licebit, ut propositionum ad Quadraturas directè pertinentium filum non abrumpas, secunda autem vice & hisce intelligendis operam non inutilem collocabis, cùm res scitu dignissimas, & Geometriæ non solùm, verùm etiam Philosophiæ promovendæ aptissimas contineant, ut aliquando fortasse apertiùs demonstrabo, nisi Lectores mei persese methodum animadverterint. Quod autem ubique passim precedentia opuscula mea supposuerim, & doctrinarum in illis expositarum vestigiis institerim, id mihi nullo, ut arbitror, vitio verti poterit, jure siquidem Auctori cuilibet permisso usus sum, quo & in sequentibus opusculis uti pergam, ad hunc etiam libellum Lectores meos deinceps amandaturus.

Jam nunc, antequàm manum è tabula retraham, illud accuratè in ipso opusculi limine animadvertendum esse decerno, quas hìc proposui, & demonstravi, Circuli & Hyperbolæ Quadraturas, non veluti præcisum illum, & absolutum, definitumque horum spatiorum Tetragonismum me divendere, qualem tanto hactenus studio incassum Geometræ quæsiverunt, quemve irrito, & ridendo conatu Cusani, Bovilli, Orontii, Scaligeri, Portæ, Berti, cæterique id genus Scriptores [à Mathematici vocabulo Scientiæ ipsius honor hìc abstinere nos jubet] in se susceperunt, nec illo præsertim sæculo expectandus fuerat, cùm Geometriæ tot prœsidia deessent, quot postmodum à summis Viris ad hujus Scientiæ amplificationem excogitata sunt, quibus adhuc, etsi maximè abstrusæ veritates Antecessoribus nostris inacesse in aperto jam positæ fuerint, complura tamen addenda supersunt, ad hoc ut Quadraturarum negotium numeris omnibus absolutum sperare possimus. Id autem discriminis interest inter has, & Parabolæ Quadraturam ab Archimede per infinita triangula, ut sub initium monebamus, exhibitam, quòd licèt tum nostræ, tum illa Archimedis, per infinitam seriem quadrabilium spatiorum procedant, illa tamen, quum terminis con-

tinuę proportionalibus constaret, in unam summam commodè, & expeditè redigi potuit, quę præcisam Parabolæ Quadraturam definiret, nostrę verò non item, sed valores tantummodò quantumvis accuratos, seu in quælitam Hyperbole, & Circuli Quantitatem ita convergentes, ut differentia infra quamlibet datam continuè extenuetur, prebere possunt, sua quidem facilitate, & generalitate commodos, in sua specie perfectos, pulcherrimamque horum spatiorum proprietatem aperientes, atque eo nomine minimè contemnendos, ulteriori tamen circa ejusmodi spatiorum dimensionem inquisitioni aditum non prçcludentes, cui ut incumbant Geometrę, novis scilicet adhuc incompertis methodis Figurarum quadraturas perficiendo, etiam atque etiam hortamur, cùm is demum precipuus Geometrię scopus, hæc meta sit.

Interea, dum non meliora fert ætas, hec damus, *Quę, etiamsi abesset utilitas, propter ipsas demonstrationes digna sunt, ut recipiantur, multa enim alia in mathematicis disciplinis ob hoc ipsum, & non ob aliquod aliud recipere consuevimus*, ut inquit Apollonius Pergęus epist. ad Attalum lib. 4. Conicorum præfixa: ut videas à veterum Sapientum doctrina quàm longissimè illos recedere, qui nunc temporis geometricarum speculationum inutilitatem damnare solent, atq. hęc studia inter litterariæ Reipublicę proceres parciùs colenda suadere conantur, eo prætextu, quòd majoris momenti, quantùm ipsis videtur, inventiones, non Geometris, aut Analystis, sed meris practicis, seu mechanicis debeantur. *Felices artes*, ajebat ille, *si soli de ipsis judicarent artifices!* At plerique, sive ad has profundiores contemplationes obtusius ingenium à natura sortiti, sive perferendi, ad ipsarum penetrationem, laboris pertesi, cùm tamen se aliquos esse, in omni disciplinarum parte, videri velint, ne quid magnum ex litteraria supellectile sibi deesse, ob hujus scientiæ defectum, recognoscant, inter minùs proficuas, aut prorsus inutiles, imò (siqua iis fides) quandoque noxias cognitiones, omnem puræ Geometrię, & Algebræ Methodum recensent: factique cujusdam imaginariæ Reipublicę Dictatores, de optimo Scientiarum gustu, ex ipsorum præjudiciis, sentiendum esse decernunt, ac leges, in addiscendis disciplinis, ex ipsorum præscripto tenendas, audacter pronunciant. Horum errorem dicam, an insaniam, eleganti pariter, ac solida parenhesi confutavit D. Fontanelle *in Præf. hist. Acad. Reg.* 1699. cujus verba huc libenter transferrem, nisi jam longiùs progressus, Lectorum tædio

par-

parcendum aliquando judicarem. Compendio dicam: Scientiarum nostrarum utilitas in Disciplinis Artibusque perficiendis se prodit, nam sensibiliũ magnitudinum affectiones, quas vel Physica, vel Astronomia, vel Optica, vel Geographia, vel Nautica, vel Architectonica, vel Mechanica respicit, eò faciliùs, & certiùs deteguntur, quò perfectior est Methodus, quaslibet in abstracto quantitatum rationes invicem conferendi, cujusmodi est pura Geometria, vel Analytica, que generalis cujuspiam instrumenti loco Intellectum promovet ad Veritatis inquisitionem: unde Plato *in Philæbo* verissimè dixit: *Siquis ab omnibus Artibus segregaret numerandi, dimetiendique, & ponderandi peritiam, vile quiddam esset quod uniuscujusque restaret*. Quodsi manent interim multę Mathematicorum speculationes omni externo fructu vacuæ, ob defectum applicationis ad alias Scientias, quibus inservire poterant, nihil propterea ipsarum pretio decedit, tum quia nudus ipse, & simplex Veritatis fructus, mentem nostram sinceri sui obiecti pabulo satis recreat, cujus deliciis siquis asueverit, non frustrà se in iis venandis laborasse arbitrabitur: tum quia non semper fortasse inutilis mansura est quælibet ex his contemplationibus, quas otiosæ Ingeniorum curiositati dumtaxat pascendæ inservire putamus. Apollonii, & Archimedis tempore Conicarum Sectionum proprietates in mera Geometrarum speculatione se continebant, nec ipsarum tangentes, umbilici, proportiones, ad ullum Artium profectum referebantur: mox tamen Balisticam, Opticam, Philosophiam, earum interventu, ad plurima vitæ civilis commoda promotas habemus. Cùm primò de Cycloidis natura, dimensione, & rectificatione ejus curvæ, inter Mathematicos decertatum est, illos ad exercendum, sterili quadam contemplatione, ingenium laborare dixisses, & inutilem operam in dificillimorum Problematum solutione tentanda collocatam ab ipsis pronunciasses; hinc tamen oscillationes horologiorum ad perfectum isochronismum redactas, cum ingenti Astronomiæ, Physicæ, Nauticæ, & Geographiæ incremento, obtinuimus; Cur ergo quaslibet Geometricas, aut Analyticas Speculationes statim, velut omni fructu vacuas, præcipiti judicio damnabimus? Cur Mathematicis Inventionis gloriam invidentes, eam in Artifices, Tignariam, Fabrilem, Fusoriam exercentes, qui ad praxim, & executionem subtilissima illorum inventa deduxerunt, transferemus? Ut largiamur, non esse subscribendum laudati Platonis sententiæ, qui acerbè in Eudoxum Gnidium, & Architam Tarentinum invehitur, quasi Philoso-

losophiam prostituissent, ex quò Mathematicas disciplinas ad usum mechanicum traduxerant, quæ propriæ veritatis contemplatione contentæ esse debuerant: nemo tamen in dubium jure vocaverit Pappi Alexandrini doctrinam, qui *præf. in lib. 8. Mathem. Collect.* postquàm distinxerat, ex Heronis sententia, alteram Mechanicæ partem rationalem, alteram manuum opera indigere, & illam quidem ex Geometria, & Arithmetica potissimùm constare, concludit: *Eum qui in supradictis Scientiis a prima ætate versatus fit, & prædictas Artes calluerit, quique acri fit ingenio, optimum fore, & Architectum, & Inventorem mechanicorum operum*: adeòut, quòd imperfectas adhuc nostras Artes conspiciamus, ex neglecto ab Artificibus profundioris Geometriæ studio potissimùm pendeat. Sed jam de hac re nimis multa. Vale.

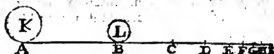
INDEX Eorum, quæ in præsenti editione Operi huic accesserunt.

PARS

PARS PRIOR
DE CIRCULO

PROPOSITIO I.

SI ratio magnitudinum AB, BC continuetur in infinitum ad minores terminos CD, DE, EF &c. sitque magnitudo AI



tertia proportionalis post differentiam primæ AB à secunda BC, & ipsam primam magnitudinem AB,

Dico ipsam AI æquari aggregato omnium simul infinitorum terminorum AB, BC, CD, DE &c.

POst Archimedem in postrema Parabolæ quadratura id specialiter de ratione quadrupla ostendentem, Primus, quod sciam, id generaliter notavit, ac demonstravit Torricellius *de dimens. Parab. lemm.* 27. mox Cavallerius *in schol. ejusd. lemm.* hinc Gregorius à Sancto Vincentio, Guarinus, De Chales, aliique variis methodis id comprobantes, quod & nos aliàs fecimus *in Hugenianis cap.* 10. *n.* 3. ut superfluum videri possit hìc quidquam

 ad-

addere, nisi gratam nonnullis futuram sperarem novam hanc physicam rationem, idipsum confirmandi, quam, ob methodi varietatem adjungere non gravabor.

Ex A, & B eodem temporis momento versùs I moveantur duo mobilia K, L, illud quidem velocitate AB, hoc verò velocitate BC; itaque, ob spatia velocitatibus proportionalia, ubi K pervenerit ad B, utique L reperietur in C, eritque mobilium distantia, non jam AB, sed BC secundus terminus progressionis; similiter ubi K progressum fuerit ad C; L pervenerit ad D; ubi illud ad D, hoc ad E, atque ita deinceps, ità ut semper aliquis ex terminis propositæ progressionis intercipiatur inter utrumque mobile, quousque, decrescente infra quamlibet magnitudinem, simul cum ipsis terminis, mobilium distantia, in fine tandem progressionis, utriusque mobilis centrum concurrat. Sit punctum talis concursus I; ergo magnitudo AI erit aggregatum omnium magnitudinum AB, BC, CD &c. & quia eodem tempore mobile K velocitate AB percurrit AI, & mobile L velocitate BC percurrit BI, erit AI ad IB, ut AB ad BC, & per conversionem rationis, ut AI summa omnium terminorum ad primum terminum AB, ita ipse primus terminus AB ad sui excessum supra secundum BC; Quare si ratio magnitudinum &c. Quod erat &c.

SCHOLION.

Ex quò inter utrumque mobile, ante concursum, intercipiatur semper aliquis ex terminis dictæ progressionis, qui multitudine

dine infiniti sunt, deducebat olim Zeno contra Aristotelem, quòd si qualibet continua quantitas in partes minores, ac minores, juxta quamlibet proportionem, in infinitum sectilis esset, numquam Aquila Testudinem, unico licet palmo praeuntem, assequi posset: has philosophicas tricas felici saltu praetergreditur Geometria, imò ex hoc Zenonis paralogismo Theorematis hujus longè jucundissimi demonstrationem derivavit, qua & Philosophos docere queat ipsummet temporis, & loci punctum, in quo Aquila ad Testudinem perveniet, si nempe fiat, ut differentia velocitatum Aquilæ, & Testudinis ad majorem Aquilæ velocitatem; ita primum utriusque intervallum A B ad spatium A I, & ita tempus, quo Aquila conficiet primum intervallum A B, ad aliud tempus, quo Aquila percurret totam A I, & sic Testudinem assequetur; Zenonis enim ratiocinio non conficitur, quòd absolutè numquam Aquila ad Testudinem sit perventura; sed quòd id contingere nequeat infra temporis, ac loci spatium nuper determinatum; Quod enim infiniti sint termini, quid refert? infinitæ etiam temporis particulæ, non quidem æquales, sed perinde minores, ac minores in infinitum iis percurrendis insumentur, ex quibus tam non est timenda infiniti temporis aggregatio, quàm ab ipsismet infinitis terminis percurrendis non est infinita spatii longitudo speranda. Vide dicta à nobis in Hugenianis cap. 4. à n. 7.

Observo nihilominus, concipi posse alium casum, in quo Aquila, quantumvis velocior Testudine, hanc revera numquam assequeretur: si nempe supponatur, aut medium in quo fit motus, aut planum, super quo mobile utrumque reptat, resistere motui in ratione velocitatis; ita scilicet, ut momentanea decrementa celeritatum sint proportionalia velocitatibus, quibus actu movetur utrumque, aut (quod in idem redit) proportionalia momentaneis incrementis spatii decursi, ut ostendunt Nevvton, Leibnitzius, & Varignonius. Vel etiam, si mobilis utriusque Velocitas in fine cujuslibet termini progressionis A B, B C, C D, D E &c. mutaretur in aliam, eadem proportione cum dictis spatiis decrescentem; spatia quippe velocitatibus proportionalia æquali tem-

pore transigi deberent, undè infinitę partes æquales temporis requirerentur ad infinitos illos terminos decurrendos, & sic nec Aquila, nec Testudo ad terminum I pervenire unquam possent, & hæc illam semper præcederet, cui aliquando præivisset, illa hanc numquam tangere, nedum premere posset, ob aliquem dictę progressionis terminum semper utrique interceptum.

PROPOSITIO II.

AB eadem prima magnitudine A duæ infinitæ progressiones terminorum continuè proportionalium incipiant, prior A, B, C, D, E &c. posterior A, M, N, P &c.

Dico, aggregatum ex terminis omnibus prioris ad aggregatum ex omnibus terminis posterioris progressionis esse, ut reciprocè prima differentia posterioris ad primam differentiam prioris seriei.

$$A\,1 \quad B\,\frac{1}{2} \quad C\,\frac{1}{4} \quad D\,\frac{1}{8} \quad E\,\frac{1}{16} \quad F\,\frac{1}{32}\ \&c.$$

$$A\,1 \quad M\,\frac{1}{3} \quad N\,\frac{1}{9} \quad P\,\frac{1}{27} \quad Q\,\frac{1}{81} \quad R\,\frac{1}{243}\ \&c.$$

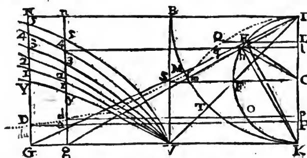
EST enim, *ex prop. 1.* series A, B, C, D &c. ad primam magnitudinem A, ut ipsa magnitudo A ad differentiam duarum A, B; ipsa quoque magnitudo A est ad seriem omnium A, M, N, P &c. *per eandem propositionem, & convertendo*, ut differentia duarum A, M, ad magnitudinem A; igitur ex æquo perturbatè, tota series magnitudinum A, B, C, D &c. ad seriem A, M, N, &c. est, ut differentia duarum A, M, ad differentiam duarum A, B. Quod erat &c.

COROLL. Omnes itaque series fractionum ab unitate deinceps proportionalium sunt reciprocè, ut earundem primę differentię, nempe series suprascripta A, B &c. ad seriem A, M &c. est, ut duo trientes ad semissem, sive ad

ad duos quadrantes, nempe ut 4 ad 3; & reipsa prima æquatur 2, secunda æquatur 1 cum semisse, *per tradita cap. 4. Hugenianorum num.* 8. & sic in reliquis.

PROPOSITIO III.

Esto semicirculus I F K circa diametrum I K, cujus ab altero extremo in alterius extremi tangentem K G [pro nunc diametro majorem] inclinata I G secet peripheriam in H, unde



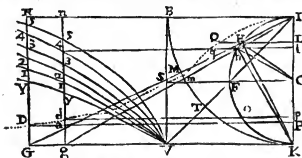
ordinetur sinus H L, fiatque, ut quadratum G K ad quadratum K I, ita ipsa diameter ad Y N, & hæc ad 1 N, eadem ratione ad infinitos terminos 2 N, 3 N, 4 N &c. propagata.

Dico, summam ex omnibus horum terminorum differentiis alternè sumptis Y 1, 23, 45. &c. æqualem esse sinui verso I L intercepti arcus I H.

Quoniam proportionalium differentiæ omnes continuè sumptæ Y 1, 12, 23, 34 &c. sunt in eadem ratione proportionales, eædemque interpolàtim acceptæ Y 1, 23, 45 &c. iterum continuè proportionales in duplicata priorum ratione, habebimus duplicem seriem proportionalium ab eodem primo termino Y 1 incipientium, quare, *per prop. præced.* aggregatum ex omnibus terminis

prio-

prioris ſeriei Y 1, 12, 23, 34 &c. (nempe ipſa YN his omnibus æqualis) ad aggregatum ex terminis omnibus poſterioris ſeriei Y 1, 23, 45 &c. erit, ut differentia duarum Y 1, 23 ad differentiam duarum Y 1, 12; eſt autem differentia duarum Y 1, 23 æqualis duabus ſimul differentiis Y 1 ab 12, & 12 à 23, igitur ut aggregatum ex duabus differentiis trium continuè proximorum terminorum ad majorem ejuſmodi differentiarum, ſive, ob analogiam



terminorum proportionalium cum ſuis differentiis, ut aggregatum ex duobus terminis continuè acceptis ad majorem ipſorum, nempe ex conſtructione ut duo ſimul quadrata GK, KI, vel ut unicum quadratum GI ad quadratum GK, hoc eſt ut IG ad GH, propter angulum IHK in ſemicirculo rectum, ita YN ad dictam ſeriem; eſtque diameter IK ad eandem YN ex hypotheſi, ut quadratum GK ad KI, ideſt ut GH ad HI; igitur ex æquo perturbatè erit diameter IK ad poſteriorem ſeriem differentiarum alternè ſumptarum Y 1, 23, 45 &c. ut IG ad HI, nempe ut eadem IK ad IL; æqualis eſt ergo ejuſmodi ſeries ſinui verſo IL. Quod erat &c.

COROLL. Quoniam tota GN æquatur toti KI, partes autem Y 1, 23, 45, aliæque deinceps alternatim ſumptæ, æquantur IL, manifeſtum eſt reliquas GY, 12, 34, & his ſuc-

ſuccedentes in infinitum eodem ordine acceptas æquari reſiduæ L K.

PROPOSITIO IV.

Iiſdem poſitis, ordinetur G D diametro I K parallela, æqualis autem ipſi I L, atque hoc ſemper fiat, quouſque per puncta D, d ſic inventa in qualibet g d *ordinata ad tangentem K G, tranſeat curva D d S Q I:*

Dico, ſpatium D d *S Q I K G ad partes G infinitè extenſum duplum eſſe quadrantis I K B, radio I K deſcripti, & ſingulas portiones G D* d g *duplas ſectoris correſpondentis M I* m *iiſdem ſecantibus, à centro ad puncta G, g deductis, intercepti.*

Concipiantur enim duæ ſecantes IG, I*g* fieri infinitè proximæ, uti & duæ ordinatæ GD, *g d*, quomodo ſpatiolum G D *d g* (per demonſtrata *in Tract. de Infin. Infinit. prop.* 5. *coroll.* 3. & 4.) pro rectangulo ex G D in *g* G haberi poterit, nec arculus per has ſecantes è ſemicirculo interceptus H*h* à recta ejus tangente, vel ſubtenſa ſenſibiliter differet; cùm verò rectangula G I H, *g* I *h* eidem quadrato diametri I K, adeòque & inter ſe ſint æqualia, erit G I ad I*g*, ut I*h* ad I H, & triangula G I*g*, *h* I H, communem angulum I habentia, ſimilia erunt, unde G*g* ad H*h* erit, ut G I ad I*h*, vel ad (minimè comparabiliter differentem) I H, ideſt ut K I ad I L, vel M I ad G D per conſtructionem; eſt autem H*h* æqualis arcui M*m*, cùm ſint differentiæ arcuum æqualium M K, H K, & *m* K, *h* K; igitur eſt G*g* ad M*m*, ut M I ad G D, & rectangulum D G*g*, ideſt ſpatiolum D*dg*G, æquabitur rectangulo I M*m*, ſeu duplo ſectoris I M*m*; quod cùm ubique, & ſemper eveniat, manifeſtum eſt, quodvis ſpatium, per duas ad tangentem K G ordinatas ab hac curva reſectum, eſſe duplum ſectoris circuli correſpondentis, necnon totum ſpatium D*d*S Q I K G,

ad

ad partes G infinitè protensum, duplum quadrantis IBK, seu quadruplum semicirculi IHK. Quod erat in hac propositione demonstrandum.

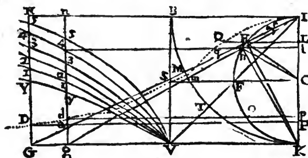
COROLL. I. Bifariam secto angulo BIK per lineam IV pariter bisecantem arcum, & sectorem in T, ordinetur VS: manifestum est, totum spatium infinitè longum DASVG æquale fore quadranti BIK, utpote duplum sectoris BIT, quemadmodùm & portio VSQIK eidem quadranti æqualis erit, ut potè dupla ipsius TIK.

COROLL. II. Ordinata ad axem IK recta DP, erit segmentum DSQIP quadruplum segmenti KbH, quia, cùm sit GK ad KI, ut HL ad IL, seu GD, rectangulum KGDP æquale erit rectangulo ex IK in HL, sive duplum erit trianguli KHI, spatium autem GDSQIK duplum est sectoris MIK, *per hanc prop.* residuum ergo spatium DSQIP duplum erit residui semisegmenti MHK, sive quadruplum segmenti KbH, vel (si junctam fingas IO) quadruplum æqualis segmenti IHO, nam PK æqualis DG æquatur ipsi IL, & HL æquatur OP, & arcus IH ipsi KO.

COROLL. III. Unde constat, quòd solidum ex spatio DSQIKG, ad partes G infinitè longo, circa asymptoton KG revoluto, æquale est duobus annulis à semicirculo KFI, circa eandem KG revoluto, progenitis, nam rectangulum GDPK ostensum est æquale IK in HL, vel OP, idest æquale duobus OPK, OPI rectangulis, quarè cylindrica superficies, à recta DP genita in primo solido, æquabitur duabus cylindricis superficiebus ab OP circa GK revoluta, & ab eadem OP circa BI rotata descriptis, sive solidum illud infinitè longum, ex DSQIKG circa KG, æquabitur annulo ex semicirculo IFK circa GK, & annulo ex eodem circa BI, sive duobus annulis, ab ipso circa eandem GK rotato progenitis, vel ei, quod, integro circulo radii CK circa tangentem KG revoluto, describeretur, solido annulari.

CO-

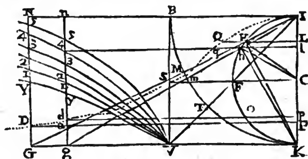
COROLL. IV. Hinc si ordinata DP bisecet radium in P, erit in ipsa DP centrum gravitatis spatii totius infinitè longi, diametro, asymptoto, & curva ISD comprehensi, nam ejus centri gravitatis distantia ab asymptoto debet



esse subdupla radii, quo distat C centrum gravitatis circuli ab eadem asymptoto, utì hic circulus æqualis est quadranti radio BI descripto, adeòque subduplus spatii DSIKG ad partes G infinitè protensi, cùm debeant, *per Coroll. præced.* sua rotatione circa asymptoton solida æqualia producere, in solidis autem æqualibus oporteat, genitrices figuras centrorum gravitatis ab axe motus distantiis reciprocè proportionales esse, cùm solidorum ratio componatur rationibus figurarum genitricum, & distantiarum centri gravitatis earumdem, ex regula P. Guldini, quam *Hugenianorum cap. XI. n.* 1. citavimus.

COROLL. V. Si aliquam ex Curvis per V transeuntibus, velut V 44. concipias esse Hyperbolam Apollonianam, asymptotis BI, IC descriptam, erit, ut spatium, recta VB, asymptoto BN, & curva hyperbolica V 44 infinitè protensa interjectum, ad quadratum VBIK, ita solidum, ex spatio DSQIKG ad partes G infinitè longo, circa ipsam IPK rotato, ad cylindrum ex quadrato VBI, & portio ex dicto spatio hyperbolico versùs partes V se-

secta per ordinatam in puncto L asymptoto IN parallelam, erit ad æquè altum rectangulum VKL, ut solidum ex DSQIP circa IP, ad cylindrum à rectangulo BIP circa eandem IP revoluto progenitum; cùm sit enim quadratum GI ad quadratum IK, ut GI ad IH, vel *K* I ad IL,



sive ut ordinata per L ad Hyperbolam, ipsi V *K* parallela, ad V *K*, erit dividendo, ut excessus dictæ ordinatæ supra V *K* ad ipsam VK, ita quadratum GK ad quadratum diametri, vel circulus DP ad circulum BI, unde methodo indivisibilium constat propositum; simulque patet, spatium integrum DQIKG, ad partes G infinitè quidem longum, sed finitæ tamen dimensionis, rotatione sua circa IK solidum producere verè infinitum, etiamsi per unicum ex minutis decimis dumtaxat converti intelligeretur; quomodo patet veritas penultimi ex illis paradoxis, quæ *in præfatione Vivianeorum Problematum pag.* 2. dudum proposui, cujusque exemplum non nemo questus erat apud Geometras desiderari, de superficie scilicet finita, quæ si tantillum moveatur solidum procreet verè infinitum: quamquàm id ostendi facilè potest locum habere & in hyperbolarum speciebus infinitis, qua parte determinatæ sunt quantitatis, si circa eam, quæ applicatis parallela est, asymptoton convertantur, itemq. in Cissoide circa diametrum circuli genitoris revoluta, &c. CO-

COROLL. VI. Quoniam ostensum est, Gg differentiam tangentis GK ad Hb differentiam arcus IH esse, ut KI ad IL, additis utrobique æqualibus rationibus, Hb ad Ll, & CH ad HL, conficietur ratio Gg ad Ll [differentiam ordinatarum DG] æqualis compositæ ex KI ad IL, & HC ad HL, ideſt ut dimidium quadrati IK (quod est rectangulum ex IK in radium HC) ad rectangulum HLI, sive ut quadratum radii HC ad triangulum HIL, ita Gg, seu Da, ad differentiam ordinatarum GD, nempe ad da, adeòque & subtangens curvę Dd, in asymptoto accepta, ad ordinatam GD in eadem ratione erit, juxta methodum calculi differentialis, quam aliàs demonstravimus *in Tract. De Infinitis Infinitor. &c. prop. 5. Coroll. 2.* quapropter illa subtangens erit tertia proportionalis post duplam HL & diametrum IK, sive æquabitur portioni tangentis semicirculum in H, quæ interciperetur utraque ad extrema diametri tangente KG, IB: quod aliquando adnotasse profuerit.

SCHOLION I.

Quoniam, tangentis hujus Curva incidit mentio, non ingratum Lectoribus meis futurum arbitror, si paululum ab instituto digrediens generalem methodum inseram determinandæ tangentis Infinitarum Curvarum similem descriptionem suscipientium, ut enim in hac Curva ordinata G D, *K I reciprocè proportionantur quadratis ramorum* K I, *I G ab eodem fixo puncto I ad eadem axis puncta eductorum, sic ubi ordinatarum potestates quælibet ab exponente* n *indicata vel directè, vel reciprocè proportionarentur ramorum potestatibus per exponentem* m *denominatis, putà si ordinatę G D forent directè, aut reciprocè, ut ramorum cubi, aut biquadrata &c. sive in ratione quantumvis multiplicata, aut submultiplicata rationis ipsorum, infinita Curva D S I orirentur, in quarum censum etiam Sectiones Conicæ*

Hyperbolæ, & Parabolæ venirent, generali æquatione, quæ in (A) exprimitur, comprehensa [posita nempe constanti I K = a, G K = y, G D = x, et ambiguo signo ∓ obtinente superiorem valorem in directa, inferiorem in reciproca potestatum comparatione] subtangens verò in asymptoto accepta (si hæc ponatur = s)

$$(A) \ldots \; \overline{aa+yy}^{\frac{m}{2}} = a^{m \mp n} \, x^{\pm n}$$

$$[B] \ldots \; s = \frac{n\,\overline{aa+yy}}{m\;y}$$

$$(C) \ldots \; dx = \frac{my\;\overline{aa+yy}^{\frac{m-2}{2}}\;dy}{n\,a^{m \mp n}\;x^{\pm n - 1}}$$

$$(D) \ldots \; dx = \frac{m\,y\,x\,dy}{n\;\overline{aa+yy}}$$

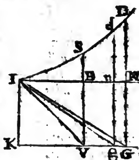
$$[E] \ldots \; x = \overline{aa+yy}^{\frac{1}{2}}$$

exprimeretur generatim æquatione (B), hoc est semper foret $\frac{n}{m}$ *tertia proportionalis post G K, & G I, accipienda quidem supra ordinatam G D in eadem asymptoto G K, ubi fuerit comparatio directa, infra verò talem ordinatam, ubi reciproca; semper enim, cùm relatio Curvæ naturam exprimens invertitur, eadem subtangens transit ad partes contrarias, ut infinitarum parabolarum, & hyperbolarum exemplo, aliisque similibus constare potest. Analyticam hujus determinationis demonstrationem Leibnitziana methodo sic breviter habe: differentiando propositam æquationem (A) ejusmodi Curvarum, elicitur æquatio (C) per regulas* in Tract. de Infinit. Infinit. in Schol. prop. 5. *nuper vulgatas, quæ reducta juxta valores terminorum ab æquatione*

Cur-

Curva desumptos, dat aquationẽ (D) *unde* $\frac{xdy}{dx}$ (*valor generalis subtangentis in qualibet imaginabili curva*) *erit in nostro proposito qualis in aquatione superiori* (B) *expressus fuit. Quod erat demonstrandum.*

Itaque in Curva hic adbibita DSQI, ubi simplices ordinata respondent ramorum quadratis reciprocè sumptis, subtangens = $\frac{1}{2}$ *tertia proportionalis post GK, & GI* [*quod coincidit cum determinatione* Coroll. 6. *nuper adducta*]: *si quadrata ordinatarum responderent ramorum cubis, esset subtangens* = $\frac{2}{3}$ *dicta proportionalis, & sic deinceps. Ubi ordinata ipsis ramis directè proportionales forent, curva ISD tota ultra lineam IN se extenderet, cui & convexitatem obverteret, esset autem nil aliud, quàm hyperbola ordinaria, cujus centrum K, semitransversus axis KI, & huic conjugatus KV; si ordinata directè responderent ramorum quadratis, fieret parabola ordinaria circa axem KI supra I productum, cujus latus rectum eadem* K *I: nam superius adducta generalis aquatio* [A] *curvarum in primo casu evaderet* (E), *qua est aquatio ad hyperbolam, quia si IV = VS, & IG = GD, utique hyperbola est aquilatera, propter quadrata KV, KG, seu IB, IN, idest ordinatarum ad axem ex punctis curva S, D, aqualia differentiis quadratorum SV, KI, & GD, KI; si verò VS, & GD saltem proportionantur ipsis IV, IG, constat ISD fore hyperbolam per demonstrata à Pappo Alexandrino* Collect. Math. lib. 4. prop. 42. *In casu secundo fieret* $ax = aa + yy$, *qua est ad parabolam, quia enim DG ad IK, vel GN est, ut quadratum GI ad quadratum IK, erit dividendo DN ad NG, aut DN*

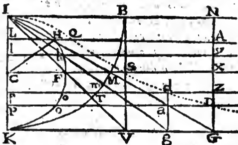


in

in IK ad quadratum IK, ut quadratum GK, seu NI ad idem quadratum IK, ideoque rectangulum ex DN in IK = quadrato IN, quæ est parabolæ proprietas; Itaque tangentes ex hoc generali calculo deductas potes cum Apollonianis constructionibus comparare.

SCHOLION II.

QUando semel aperta est in digressiones via, quid vetat ne in satis obviam de Intensionibus contemplationem divertamur? Summa huc redit, Figuram DSQIKG, in hac propositione consideratam, adhiberi posse pro Scala Intensionum *infinita linea* KG, *per idem irradians punctum I lumine collustrata (voco scilicet* Scalam Intensionum *eam figurã, quæ suis ordinatis repræsentat gradus intensionum ejusdẽ illuminationis in punctis, quibus applicantur) notum est enim, intensionem in G ad intensionem in* K *esse in duplicata ratione distantiarum* K I, *IG reciprocè sumptarum [non ea quidem ratione, quam* Opticæ lib. 3. prop. 4. *adducit Cl. De Chales, nam ibi supponitur eadem inclinatio, quæ hic non servatur, atque ibi ad superficiem, hic ad simplicem lineam est illuminatio, sed quia decrescit lumen in G, tum ratione distantiæ majoris, adeoque in reciproca ratione KI ad* IG, *tum ratione inclinationis radii* IG, *quæ sequitur proportionem sinuum angulorum IG*K, *& ideò ad intensionem perpendicularis incidentiæ* I K *est rursus, ut* I K *ad* I G, *ob latera sinubus oppositorum angulorum proportionalia] sed &* I L, *seu GD ad* K I *est in duplicata ratione ipsarum*



IK,

IK, IG, *quippe ut* HI *ad* IG, *ergo si linea* IK *repraesentet maximam perpendicularis radii* KI *in vicinissimo puncto* K *intensionem, linea* GD *repraesentabit intensionem puncti* G *remotioris, ab inclinato radio* IG *causatam, & sic luminis intensio in infinita linea* KG *decrescet juxta rationem ordinatarum hujus Curvae, quam ideò* Scalam *ejus* Intensionis *meritò appellamus.*

Hinc nova demonstratione physica confirmari posset aequalitas spatii infinitè longi DdIKG, *& cujusvis ejus proportionis, cum duplo quadrantis, aut sectoris correspondentis; cùm enim puncta singula peripheriae* KMB *sint aequè distantia à Luminoso* I, *& radiis* IM *perpendiculariter occurrentia, eorum intensio ubilibet exponetur per constantem lineam* IK, *eritque rectangulum ex ipsa* IK *in peripheriam* KMB, *vel quamlibet ejus portionem* MT, *Scala aequabilis intensionis luminis per ipsam diffusi; sunt autem Schalae intensionum [caeteris paribus] ut quantitates Luminis, adeòque, cùm eadem sit Luminis quantitas, scilicet idem radiorum numerus, intra angulum* GIV, *tangentis portionem* GV *afficiens, atque illustrans arcum* MT *(nec non infinitam* KG, *& totum* KMB*) consequens erit, Scalas utriusque intensionis aequales esse.*

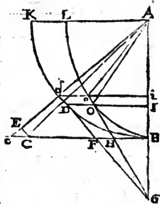
Ecce alterum Exemplum, ut methodus illustretur. Semicirculum IHFK, *ejusque diametrum* IK *illustrent paralleli radii, sive à puncto infinitè dissito provenientes,* NI, AL, TI, XC, Zp, DP, GK *&c. manifestum est, omne distantiae discrimen evanescere, omnemque adeò intensionis differentiam penes variam inclinationem radiorum desumendam esse, cùmque ad eundem (sive rectum, sive acutum) angulum hi radii diametrum afficiant, non sic verò peripheriam* IHFOK, *erit aequabilis intensionis producta in* IK *Scala rectangulum ex ipsa* IK *in radium, vel sinum anguli constantis, ad quem radios excipit, Scala verò inaequabilis intensionis diffusa per* IHFOK *erit factum ex sinubus* HL, FC, OP *&c. applicatis ad respectiva peripheriae puncta* H, F, O, *quippe quibus proportionantur gradus intensionis ab inclinatione angulari radiorum, cui correspondent, producti, cùmque*

que

quæ utraque intensio fit ab eadem radiorum quantitate, erunt prædictæ Scalæ æquales, nec non correspondentes utriusque partes semper æquabuntur, videlicet rectangulum ex radio F C *in* L P *æquabitur facto ex omnibus sinubus* H L, F C, O P *erectis super correspondente arcu* HFO *in cylindrica superficie super ipso erecta: quod apprimè consonat his, quę de Ungulę cylindricę dimensione, tum ab aliis, tum à nobis* in Vivianeis *sunt demonstrata, idque applicari posset cuilibet alteri curvę* KTM, *aut* DSQ *iisdem radiis interpositę, modò ad ipsam curvam erigerentur ubique sinus inclinationes radiorum super tangentes punctorum correspondentium.*

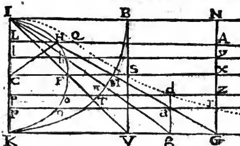
Similiter si iidem radii paralleli N I, X F, D O *totam superficiem hemisphærii ab* IHF *circa* F C *geniti illustrare intelligãtur, scala intensionis habebitur, complanata hemisphærica superficie* (*modo* in Vivianeis *tradito* in Scol. prop. 3. *ut scilicet semipersphærię ex sinuum conversione descriptę ordinentur arcui* I H K *in rectam extenso ad puncta correspondentia*) *erectisque in singulis punctis* H *sinubus* H L, *repræsentantibus gradus intensionum correspondentium, unde quoddam solidum resultabit, cujus naturam facilè concipies, si complanatam figuram sinuum totius quadrantis* I H F *ducas in dictam hemisphæricam superficiem expansam subcontrariè positam, intelligesque ejusmodi solidum æquari cylindro, cujus basis eadem, quę hemisphærii, & altitudo ęqualis radio* F C, *designanti constantem gradum ęquabilis intensionis resultantis in plano dictę basis hemisphærii per eosdem radios illustratę.*

Rursus. Concipiatur lumen in A *per radios à se divergentes illu-*



illustrare sibi oppositam planam superficiem super B C *erectam, nec non sibi concentricam sphericam superficiem* B D K, *quam aquabili intensione ubilibet illuminabit. Cogitemus ergo (lubet enim & hujus methodi specimen tyronibus consultò aperire, & si aliunde minimè necessarium in re satis obvia) luminis conulum scalenum* C A c, *cujus basis portiuncula infinitè exigua plani illustrati, ellipsis nimirum, cujus majusculus axis* C c, *sitque* D d *portiuncula sphericę superficiei prędictę, seu potius circellus infinitè parvus diametri* D d, *ejusdem coni lateribus interceptus, cui parallelus alius circulus circa diametrum* c E, *portiuncula scilicet alterius sphericę superficiei concentrica, eundem coni angulum subtendentis. Erit ergo intensio in* C c *ad intensionem in* D d *reciprocè, ut circulus diametri* D d *ad ellipsim majoris axis* C c, *idest in ratione composita ex rationibus, circuli* D d *ad circulum* c E, *& hujus ad dictam ellipsim; quarum rationum prima est eadem, quę quadrati* D A, *seu* A B, *ad quadratum* A C, *secunda eadem, qua* c E *ad* C c *(alter enim ellipseos minor axis aquatur ipsi* c E, *vel ab eo non nisi infinitè exiguo secundi ordinis intervallo differt) hoc est qua rursus* A B *ad* A C; *quarè intensio in* C c *ad intensionem in* D d *(vel ad aqualem, quę in* B*) est ut cubus* B A *ad cubum* C A, *nempe reciproca cubis distantiarum.*

Hoc intellecto supponatur [ut in fig. adversę pag.] *lumen* I *eodem modo irradiare in planum super* K G *erectum, cùmque sciamus, intensionum gradus reciprocos esse, non jam quadratis, sed cubis distantiarum à puncto luminoso, fiat curva* I Q S D, *cujus ordinata* G D, V S *reciprocę sint cubis* V I, G I, *eaque circa* I K *revoluta producatur solidum basis infinita, cujus radius ipsa asymptotus* K G, *eritque ejusmodi solidum aquale cylindro, cujus*



basis aequetur hemisphericae superficiei ex quadrante BIK genitae, altitudo verò aequalis radio IK, id est aequale duplo cylindri ex quadrato BK, nam solidum illud erit scala intensionis indefiniti plani circularis ex conversione ipsius KG progeniti, ille verò cylindrus scala aequabilis intensionis ab eadem radiorum quantitate in hemisphericam superficiem ex quadrante KMB *genitam traductae.*

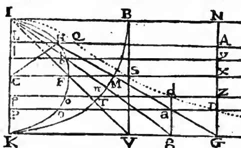
Denique lumen in I existens irradiet in superficiem sphericam IHOK, *erunt intensiones reciprocè simplicibus distantiis à luminoso, nam intensio in portiuncula* Mm *superficiei concentricae* BK *ad intensionem portiunculae* Hh *superficiei primò propositae est reciprocè, ut extensio hujus ad extensionem illius, nempe, ut ellipsis diametri* Hh *intra conum luminis* MIm *conclusa ad circulum aequalis diametri* Mm *(sunt enim hae diametri ipsae differentiae aequalium arcuum* HK, MK *) videlicet ut alter axis ejusdem ellipseos priori conjugatus ad diametrum* Mm, *sive ut* HI *ad* IM, *quarè etiam intensio in* K *ad intensionem in* H *erit, ut* HI *ad* IK, *vel ut* IK *ad* IG, *quarè Scala intensionis aequabilis sphericae superficiei concentricae* BMK *existente cylindro, basim habente eandem hemisphericam superficiem complanatam, & altitudinem radio* IK *aequalem, scala intensionis sphericae superficiei* IHK *erit solidum proveniens ex hac ipsa superficie in planum redacta, erectis ubique ad puncta* H, h *altitudinibus secantium* IG, Ig, *atque hoc solidum eidem cylindro aequale idcirco probatur, quia scalae intensionum, caeteris paribus, sunt ut quantitates luminis, hic vero eadem luminis quantitas, nempe idem radiorum numerus ex angulo* I *in utramque superficiem* IHK, *vel* BTK *diffunditur.*

SCHO-

SCHOLION III.

H*Abes hic, ut arbitror, quo totum physicomathematicum de Intensione argumentum [aliasque similes materias per methodi imitationem] vel illustrare, vel reformare possis, nec ad arduas Geometriæ veritates scandere ejusmodi scalarum adminiculo tibi inutile fuerit, modò à præcipitiis tibi caveas. Interim verò notare potes, quomodo mutuas sibi manus, ad Veritatem inquirendam, conferant Scientiæ, ipsaque Philosophia Geometriam promovere aliquando possit, gratam illi vicem, ob tot commoda, quibus in dies se ab illa locupletari sentit, officiosè rependens, non modò per considerationem* Gravitatis *figuris geometricis tributæ, ut jam inde ab Archimedis tempore invaluit, sed & nunc nova methodo, per considerationem* Lucis, *ac variæ intensionis in linearum, & superficierum illustratione resultantis: nec minùs fortasse ex aliis physicis qualitatibus geometricè expensis sperare licebit, Mathematicos hoc exemplo incitatos Scientiæ nobilissimæ, & jam amplissimę pomęria novis accessionibus extensuros.*

Cæterùm, occasione hujus Scalæ *intensionis lucis, memini Cl. V. G. G. Leibnitzium in litteris ad me datis Hanoveræ 21. Julii 1705. optimè monuisse, ejus contemplationem cum ipsius gravitatis graduum expositione esse conjunctam; Sic quippe scribit*: Scala intensionum luminis inserviet etiam ad gradus sollicitationum gravitatis: jam olim enim eo modo, quo judicamus illuminari objecta in ratione distantiarum reciproca duplicata, notavi etiam sollicitari gravia à centro, Mathematicè scilicet, seu abstractè rem tractando, & physicas causas seponendo. Atque hinc duxi planetas tali lege ad solem niti, quod etiam (nescio an eodem argumento) Nevvtonio placuit. *Quo posito, animadverti comparationem hanc lucis, & gravitatis ulteriùs extendi posse: ut quia gravitationes super quibusvis planis sunt, cæteris paribus, proportionales sinibus inclinationis eorundem planorum ad perpendiculum*



culum, si intelligatur centrũ graviũ infinitè dissitum à semiperipheria circulari IHFK, *ut directiones hinc ad illud tendentes sint parallelæ IN, HA, FX, OD,* KG *&c. sustineatque dicta peripheria* IHFK *aquam, aliudve fluidum, aut solidum corpus homogeneũ æqualis crassitiei (velut si foret catenula, veliũ, aut linteum in eam figuram sinuatum) Scala gravitationum, seu pressionum, quas dicta Curva sustineret, esset figura sinuum* HL, FC, OP *super arcu* HFO *ad puncta correspondentia erectorum, dum interim Scala pressionum, seu gravitationum, quas sustineret recta* ILPK, *dum easdem graves particulas perpendiculariter regeret, esset rectangulum ex radio* FC *in ipsam* ILPK, *tum integrè, tum particulatim correspondentes utriusque Scalæ portiones comparando, ut in altero exemplo* pag. 15. *adducto de intensione lucis dictum est, & summa gravitationum unius summæ gravitationum alterius æqualis colligeretur. Item si in vase hemisphærico, graves particulas continente, gravitationum summa, per imaginem Scalæ ipsam repræsentantis, exquiratur, id obtinebitur, ut in simili exemplo subjuncto* pag. 16. *Quodsi planum* KG *(posito jam centro gravium in puncto* I*) gravetur æquè alti corporis fluidi, aut solidi incumbentis pressione, Scala gravitationum evadet figura, ex curva* DSQI, *cujus ordinatæ* OG, SV *reciprocæ sint cubis directionum in centrum* I *convergentium* VI, GI *(ut in simili de intensione lucis diximus* pag. 17. & 18.*) circa axem* IK *revoluta proveniens, nam ad rationem sinuum inclinationis cum perpendiculis, addetur duplicata ratio reciproca distantiarum, juxta quam in hoc systemate gravitas decrescere in* G, & V *intelligitur; & si vel maximè interminatum fo-*

ret

ret planum KG *ad partes* G, *adeoque immenso corpore gravatum, summa nihilominus gravitationum finita foret, ut patet ex ejus Scala, nempe ex dicto solido curva* IQD *circa* IK *revoluta, aquali duplo cylindri ex quadrato* BK *generati, ut ostendimus; & sanè non magis, aut minùs infinitum illud planum ab immenso ejusmodi corpore gravaretur, quàm hemisphærica superficies ex quadrante* BIK *producta ab aquè crasso finito corpore sibi incumbente. Si verò incumberet grave fluidum, aut solidum superficiei convexa sphera* KOHI, *gravitationes forent reciproca simplicibus distantiis, ut in postremo exemplo* pag. 18. *observatum fuit de Scala similis illustrationis: sed si omnia persequamur, vix ullum tam jucunda contemplationis exitum inveniremus, itaque eadem methodo perquirendas aliarum figurarum gravitationes Lectoribus remittimus.*

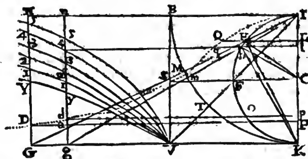
MONITUM.

HUjus Propositionis Corollariis adnecti debuerant supra *ad pag.* 11. quæ inter *Addenda, & Notanda* prioris editionis ad calcem libelli observaveram, nunc verò, & si aliquantò seriùs animadverterim additionem hanc esse faciendam, saltem post Scholia, antequàm ad aliam Propositionem gradum faciam, hoc loco reponenda censui, non sine aliquo auctario, quod præmissorum etiam Scholiorum doctrinam poterit illustrare.

1. Itaque primò observari meretur, quòd etiamsi I *K* non esset ipsis HL, GK normalis, & etiamsi pro semicirculo supponeretur quævis alia figura IHK, & pro quadrante BIK substitueretur figura orta ex ramis IM proportione mediis inter inclinatas IG, & interceptas IH, modò aplicatæ GD ipsi diametro IK parallelæ æquales etiamnum forent abscissis IL, esset spatium figuræ KMBI subduplum totius DQIKG, & quævis portio MIT subdupla partis correspondentis DSVG; Indefinitè enim se-

cta

cta GK in partes æquales minimæ Gg, ductaque Img, erit triangulum GIg ad simile circumscriptum spatio KMI [quod finge esse mIS], ut gI ad tertiam proportionalem Ib, sive ut KI ad Il, vel ng ad gd, aut ut parallelogrammum ngG ad dgG circumscriptum spatio $DdSVG$, & permutando, ut triangulum GIg ad parallelogrammum ngG (idest semper in subdupla ratione) ita mIS ad dgG; Quare &c.



2. Rotatis etiam NIKG, DQIKG circa KG, erit cylindrus ad solidum, ut triangulum GIK ad spatium HFKI; semper enim triangulum GIg ad simile adiacens lateri IH, quod inscriberetur figuræ HFKI, est ut quadratum GI ad quadratum HI, vel ut circulus progenitus ex radio NG ad circulũ radio DG, sive ut cylindrus ex parallelogrammo Ng ad cylindrũ solido inscriptum ex parallelogrammo DGg, existentibus tam triangulis GIg, quàm cylindris Ng, invicem æqualibus. Rem, si placet, ad Veterum normam exigito, ego generaliorem Veritatum harum fontem indicasse contentus, exhaurire non curo.

3. Item Corollaria II. & III. Fermè generatim verificantur, manet enim illorum rectangulorum DPK, & IK in GL æqualitas, & rotundi solidi circa asymptoton cum duplici annulo ex figura KHI circa ipsas NI, KG revoluta genito.

4. Quin

4. Quin illud addo, perpendiculariter erectis ad singula puncta cujusvis curvæ, etiamsi infinitæ, IQSD finibus rectis inclinationum talis curvæ, sive ejus tangentium in iisdem punctis, ad ordinatas QL, SC, DP oriri hinc superficiem æqualem rectangulo sinus totius in axem IP, idemque in qualibet ejus portione verum esse, cùm illa sit scala intensionis lucis, vel gravitationis curvæ, hoc verò intensionis rectæ IK per easdem parallelas NI, DO &c. [juxta dicta in Schol. 2. & 3.] quæ scalæ cùm referant eandem luminis, aut pressionis quantitatem, debent esse æquales; id quod vel hinc geometricè confirmatur, quia Dd ad da seu pP est, ut sinus totus ad sinum rectum anguli dDa, ergo factum extremorum, nempe sinus recti in elementum curvæ Dd, æquatur facto mediorum, scilicet rectangulo ex sinu toto in pP, atque id semper: quare &c.

Verùm è nimis longo diverticulo in viam præcipui nostri propositi redeamus.

PROPOSITIO V.

PEr punctum V quadrati BIKV inter communes asymptotos BI, IK transeant infinita hyperbolæ VyY, V 1 1, V 2 2, V 3 3 &c. quarum ordinatæ ad alteram asymptoton IBN respondeant potestatibus abscissarum à centro I per singulas deinceps pares numeros denominatis, videlicet, ut quadratum NI ad quadratum BI, ita sit BV ad YN, & ut biquadratum NI ad biquadratum BI, ita rursus BV ad 1 N, itemque ut sexta potestas NI ad similem BI, ita BV ad 2 N, atque ita porrò.

Dico, Circulum diametri KI æqualem esse omnibus simul hyperbolicis spatiis YyV 1 1, 2 2 V 3 3, 4 4 V 5 5 &c. idest differentiis alternè sumptis dictarum hyperbolarum.

MAnifestum est enim, lineas IK, seu BV, & YN, 1 N, 2 N, 3 N &c. esse continuè proportionales in ratio-

$\overline{ni}^2 \cdot \overline{bi}^2 :: BV.$
$\overline{ni}^4 \cdot \overline{bi}^4 :: BV.$
$\overline{ni}^6 \cdot \overline{bi}^6 :: BV.$
$ni = x. \quad yn,$
$bi = a = BV$
$x^m y = a^{m+1}$
$y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$
$\frac{a^3}{xx} - \frac{a^5}{x^4} + \frac{a^7}{x^6} - \frac{a}{x}$
$yx = ok$

ratione quadrati NI, ad IB, ſeu G*K* ad KI, nam ejuſmodi poſita fuit proportio primę ad ſecundam, primę verò ad tertiam duplicata, ad quartam triplicata, ad quintam quadruplicata prioris, ob indices poteſtatum abſciſſarum, quibus reſpondent, per eandem binarii differentiam arithmeticè creſcentes; ergo *per prop.* 3. erit ubilibet ſinus verſus IL arcus correſpondentis IH, vel ipſamet GD ordinata ad curvam DSQI, de qua *in prop.* 4, æqualis omnibus ſimul proportionalium ejuſmodi differentiis alternè ſumptis Y 1, 23, 45 &c. & hoc ſemper: quarè totum ſpatium DSVG ex prædicta curva ad partes DG infinitè longum ęquabitur omnibus numero, & longitudine infinitis hyperbolarum differentiis alternis Y*y*V 1 1, 2 2 V 3 3, 4 4 V 5 5 &c. quarè cùm *per coroll.* 1. *prop.* 4. quadrans BKI, ſeu Circulus diametri IK, ſit æqualis ſpatio infinitè longo DSVG, æquabitur dictus Circulus propoſitis hyperbolicis differentiis. Quod erat &c.

COROLL. I. Idem obtinet de partibus, quòd nempe infinitæ portiones ex iiſdem ſupra deſignatis hyperbolarum differentiis, putà Y *y* 1 1, 2 2 3 3, 4 4 5 5 &c. æquales ſint ſpatio G*gd*D, ſeu duplo ſectoris correſpondentis MI*m*.

COROLL. II. Cùmque tum integra illa hyperbolica ſpa-

ſpatia ſint quadrabilia ex generali doctrina, quam dedimus *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. tum quælibet eorum portiones ſint propterea notæ dimenſionis, erunt & integrorum, & partium differentię noto rectangulo æquales, unde & circuli, & ſectoris cujuslibet quantumvis vero proxima quadratura, & dimenſio geometricè innoteſcet; quod amplius ſequenti propoſitione manifeſtum fiet.

PROPOSITIO VI.

QUadrato diametri Circuli exiſtente = [A], *ſive unitati, ſingulis verò fractionibus* (B), [C], (D), [E] &c. *dividentibus unitatem per omnes impares numeros ſibi ex ordine ſuccedentes, erit ipſe Circulus æqualis infinitæ ſeriei ex ipſis alternatim additis, detractiſque, nimirum* = (A) − (B) + [C] − (D) + [E] − &c.

$(A)\ 1 = (K)\ \frac{1}{2-1}$

$[B]\ \frac{1}{3} = [L]\ \frac{1}{4-1}$

$(C)\ \frac{1}{5} = (M)\ \frac{1}{6-1}$

$[D]\ \frac{1}{7} = (N)\ \frac{1}{8-1}$

$(E)\ \frac{1}{9} = (O)\ \frac{1}{10-1}$

&c. &c.

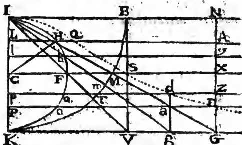
$(H)\ \frac{x}{y-x}$

HÆc eſt celeberrima Summi Geometræ Leibnitzii Quadratura, quæ ex poſitis principiis ſic breviſſimè oſtenditur: Per dicta *loco citato Hugenianorum* quodlibet hyperbolicum ſpatium eſt inſcripti rectanguli, ideſt in propoſito quadrati VBIK, talis pars, qualem deſignat fractio (H), exprimente x gradum ordinatarum [qui hìc eſt unitas] & y gradum abſciſsarum [qui eſt quilibet par, 2. 4. 6. 8. &c.) adeòque primum hyperbolicum ſpatium eſt [*K*], ſecundum (L), tertium (M), atque ita deinceps, nempe (A), [B], [C], (D), (E) &c. Circulus ergo, qui *per prop. præced.* æquatur differentiis dictorũ ſpatiorum, poſito quadrato diametri I*K* = 1, fiet æqualis ſeriei (A) − [B] + (C) − (D) + (E) − &c. Quod erat &c.

SCHOLION I.

$$(P)\ \frac{a^3}{xx+aa} \quad [R]\ \frac{a^3}{xx} \quad (S)\ \frac{a^5}{x^4} \quad [T]\ \frac{a^7}{x^6} \quad (V)\ \frac{a^9}{x^{8}} \quad \&c.$$

Analyticè id totum sic expediri poterat. Posita diametro IK $= a$, *& indeterminata* GK $= x$, *erit GD ordinata ad curvam DSQI, de qua* in Prop. 4. $=$ [P], *id est per doctrinam expositam* in Hugenianis capite 10. numero 5. *aequalis seriei* (R) $-$ [S] $+$ (T) $-$ [V] $+$ &c. *Sunt autem hae ipsae expressiones ordinatarum ad infinitas hyperbolas, quarum gradus in abscissis crescant juxta numeros pares, ut constat; quaelibet ergo ordinata* G D *aequivalebit differentiis ordinatarum ad infinitas illas hyperbolas, adeóq; & spatium figura ab hac curva DSQI comprehensum, id est sector circuli correspondens, aequabitur infinitis differentiis praedictarum hyperbolarum, seu differentiis fractionum per impares numeros denominatarum, taxato valore ipsius* aa *pro unitate; Quod est propositum.*



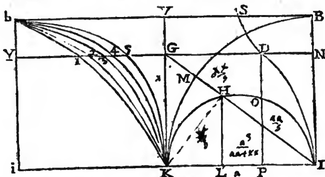
SCHOLION II.

Sic instituto meo, Circulum per Infinitas Hyperbolas *Quadrandi, satisfecisse me arbitror; superest, ut idem* per Infinitas Parabolas *moliri aggrediar; quod tamen longè compendiosiùs exequi dabitur.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

SI fiat, ut quadratum diametri IK ad quadratum tangentis KG (diametro jam minoris) ita ipsa diameter, vel ei aqualis YG ad 1 G, & hac ad 2 G, eadem ratione ad infinitos terminos 3 G, 4 G, 5 G &c. prorogata.

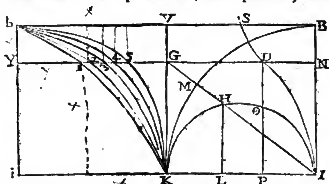


Dico, summam ex omnibus horum terminorum differentiis alternè sumptis Y 1, 23, 45 &c. aqualem esse finui verso IL arcus IH, per secantem IG intercepti.

HOc probabitur, repetendo idem ratiocinium, quod supra, *prop.* 3., adduximus, videlicet. Quoniam proportionalium differentiæ omnes continuè sumptæ Y 1, 12, 23, 34 &c. sunt in eadem ratione proportionales, eædemque interpolatim acceptæ Y 1, 23, 45 &c. iterum continuè proportionales in duplicata priorum ratione, habebimus duplicem seriem proportionalium ab eodem primo termino Y 1 incipientium, quare *per propos.* 2. aggregatum ex omnibus terminis prioris seriei Y 1, 12, 23, 34 &c., nempe ipsa YG his omnibus æqualis, ad aggregatum ex terminis omnibus, posterioris seriei Y 1, 23,

 45 &c.

45 &c. erit, ut differentia duarum Y 1, 23 ad differentiam duarum Y 1, 12; est autem differentia duarum Y 1, 23 æqualis duabus simul differentiis Y 1 ab 12, & 12 à 23, igitur ut aggregatum ex duabus differentiis trium continuè proximorum terminorum ad majorem ejusmodi differentiarum, sive, ob analogiam terminorum proportionalium cum suis differentiis, ut aggregatum ex duobus terminis continuè acceptis ad majorem ipsorum, nempe



ex constructione, ut duo simul quadrata G K, K I, vel ut unicum quadratum G I ad quadratum I K, sive ut G I ad I H, vel K I ad I L, ita Y G ad seriem ejusmodi differentiarum alternè sumptarum; est autem K I æqualis Y G ex hypothesi, igitur & I L prædictis omnibus simul differentiis æquatur. Quod erat &c.

COROLL. I. Eadem constructione facta ad singula puncta G tangentis V K, manifestum est, lineas Y G completuras quadratum V K *ib*, & lineas G 1 trilineum parabolæ quadraticæ *b* 1 K, lineas autem G 2 trilineum parabolæ biquadraticæ *b* 2 K, & lineas G 3 similiter esse ad parabolam quadratocubicam, atque ita deinceps reliquas esse ad altiores parabolas, quarum dignitates V K, G K omnibus ex ordine paribus numeris denominantur: sic enim

pro-

prorogatur ad infinitos terminos proportio Y G ad 1 G, quæ ab initio posita fuit duplicata ipsius V K ad K G.

COROLL. II. Quoniam ergo ordinata G D ad curvam I D S *prop.* 2. descriptam æquatur semper sinui verso correspondenti I L, manifestum est, ipsam quoque G D æquari prædictis proportionalium differentiis alternè sumptis, adeòque & spatium V S D I K æquari spatio parabolicò *b* 1 K *i*, & parabolicis lunulis *b* 2 K 3 *b*, *b* 4 K 5 *b* &c.

COROLL. III. Ex quo ubique Y G — 1 G, † 2 G — 3 G, † 4 G — 5 G &c. æquetur ordinatæ G D, constat, etiam *b* V — *b* V, † *b* V — *b* V, † *b* V — *b* V &c. æquari V S, idest eandem lineam infinities positam, & infinities subtractam relinquere sui medietatem: Id quod etiam ex supradictis *propositione III.* deduci poterat.

* Sed inquies: aggregatum ex infinitis differentiis infinitarum ipsi *b* V æqualium, sive continuè, sive alternè sumptarum, est demum summa ex infinitis nullitatibus, seu o, quomodo ergo quantitatem notabilem aggreget? At repono, eam Infiniti vim agnoscendam, ut etiam quod per se nullum est multiplicando, in aliquid commutet, sicuti finitam magnitudinẽ dividendo, in nullam degenerare cogit; unde per infinitam Dei Creatoris potentiam omnia ex nihilo facta, omniaque in nihilum redigi posse: neque adeò absurdum esse, quantitatem aliquam, ut ita dicam, creari per infinitam vel multiplicationem, vel additionem ipsius nihili, aut quodvis quantum infinita divisione, aut subductione in nihilum redigi.

S C H O L I O N.

Duo hoc loco notanda occurrunt: alterum circa priorem partem hujus tertii corollarii, quæ sola in prima editione proposita fuerat: alterum circa subjunctæ instantiæ solutionem, quæ post asteriscum adjecta nunc legitur. Quò ad primum, observo plu-

plurimos Mathematicos non vulgares, qui libellum nostrum legere, expendere, ac comprobare dignati sunt, Corollarii hujus novitate perculsos, atque in summam tam inauditę, inexpectatęque veritatis admirationem adductos fuisse, cùm nihil huic stupendo paradoxo simile in tota Geometria se uspiam legisse testarentur. Ego verò idem rudiori exemplo exponi, ac vulgo etiam persuaderi posse censebam, hoc pacto. Titius, & Mævius fratres, dum Patris hæreditatem inter se ex æquo dividunt, de unico pretiosissimo lapide, immensi valoris, in quo effigies Concordiæ affabrè exsculpta visitur, contendunt. Nefas est vendere, ac pretium inter se distribuere, nam Pater testamento cautum voluit, ne tam raram gemmam à familia alienari posteri sui paterentur; neque alter ab altero illam redimere posset, vel totius hæreditatis cessione: sorti verò ut possessionem tanti thesauri committant, adduci nequeunt. Quid faciendum? Re ad Judicem delata, post multam Jurisconsultorum altercationem, placuit Javoleni sententia, ut alternis diebus in alterutrius musæo incomparabile hoc simulacrum collocaretur; itaque Titius natu major pretiosam effigiem prior obtinuit, mox ab eo ablata, & Mævio concessa est, deinde rursus Titio restituta, iterumque ab hoc ad Mævium translata, atque ita deinceps apud hunc, & illum, & utriusque successores in perpetuum, alternatim mansit, & excidit controversa gemma dominium; unde factum est, ut indivisa manente tam rara effigie, ejus possessio fuerit inter utramque domum dimidiata. En ut eadem quantitas infinities posita, & infinities subtracta æquivalet dimidio sui. Nec difficile fuerit, variato fratrum numero, casus alios fingere, quibus alia hæreditatis portio singulis obtingat, indeque alia paradoxa similis tenoris proponere, quæ pariter, descriptis convenientibus curvis, modo supradicto demonstrarentur.

Quò ad alterum, monendus est Lector, hæc eadem præcisa verba, nullo apice mutato, in meo exemplari, quod prima editioni obtulerā, jam descripta fuisse: at nonnemo Censoris vicem subiens, cùm nihil aliud in toto opusculo carpendum invenisset, ex hac

com-

comparatione, qua ad proposita instantia solutionem usurpatur, materiam critica alicujus sibi oblatam gaudens, me statim convenit, incongruam hanc sibi videri geometricarum rerum ad divina Omnipotentia mysterium explicandum applicationem prætendens: itaque ut potius obiectionem illam, admissa Galilai sententia circa continui compositionem, eludere tentarem, hortabatur; respondendo scilicet, quòd licèt indivisibilia puncta, quarum nulla extensio est, quamdiu multitudine finita supponuntur, nullam extensionem facere possint, tamen, ubi numero infinita sint, quantitatem aliquam componere non prohibentur. Ego verò, qui nec in ea controversia Galilai ductum sequi, nec ejus opinionis me vadem exibere in animo habebam, atque aliundè nec decere, nec expedire arbitrabar, ut cum illo de hac analytici, & theologici argumenti comparatione, longum contentionis filum producerem; quippe non elementaris modo Geometriæ, sed Analytica, ac Theologia quoq; cognitionẽ res exigere videbatur: satius duxi secum liberaliter agere, ac tribus transversi calami ductibus obiectionem simul, et responsionem delere; qua scrupulo ansam dederat, cùm ab exiguo hoc paragrapho totam vim, aut elegantiam, vel perfectionem libelli mei non pendere censerem.

Nunc autem, quoniam intelligo eundem hunc Censorem palam jactabundum asseruisse, meam hanc opellam à se emendatam, & castigatam, expuncto majuscula errore, quem ipse mihi indicaverit, & supprimendum monuerit: rem totam, pro ut est (cum bona eorum, quorum interest, venia) Lectorum oculis subiiciendam decrevi, ut Litteraria Respublica judicet, num ego ulla ratione in hoc proposito culpandus essem, qui divina Omnipotentia vim creaticem hoc analytico mysterio adumbrare contendebam. (quod & Bernardum Nievventiit in præf. Analyf. Infinit. *fecisse lego, ubi ait:* Accedit maximi hinc momenti præterea veritatem directè sequi: omne nimirum divisibile, adeoque & omnem quantitatem, vi infinita in nihilum esse reducibilem, eademque vi infinita quantitatem quamcunque ex nihilo produci posse, cùm ex eo productum

esse.

esse, in quod divisione resolvi potest, quidlibet meritò censendum sit) *an ipse potius Censor reprehendi jure mereretur, qui tam validum in hostes veræ Fidei telum mihi è manibus excussisset, perinde acsi Cari Lucretii sui, aliorumq; atheorum Philosophorum decantatū axioma* (Ex nihilo nihil, in nihilum nil posse reverti) *hac nostra observatione labefactari, & oppositum Catholicæ Veritatis dogma stabiliri ægrè ferret, atque tam necessario Religionis nostræ principio confirmationem hanc ex Analytica petitam invideret. Absit quidem, ut de Censoris animo tale quid ipse suspicer, at nec video in verbis meis quid ejus virgam posceret, quid ejus spongiam exigeret. Aut enim doctrina ipsa physica, seu geometrica Corollarii hujus nudè spectatur, aut ejus duntaxat cum vi creatrice Omnipotentiæ collatio criminationi est obnoxia: si primum, non erat cur me, Galilaanæ opinionis lubrico, & à paucis admisso, exemplo de infinitudine punctorum lineas componentium, potiusquàm certissimo, & extra controversiam posito argumento creationis rerum omnium ex nihilo, ad eam fulciendam, confirmandamque invitaret: si secundum, ergo similitudines omnes, analogias, symbola, quibus solent, pro modulo nostro, divina mysteria explicari, penitus deinceps amoveri oportebit, ipsaque summi Conditoris Imago nostris animis infixa delenda erit, ne quid humanum, & creatum cum divino, & increato conferre præsumamus. Quod si hanc* Creatoris similitudinem, *nedum non vituperandam, sed optimo jure commendandam fatemur, cur* imaginem Creationis *in hisce analyticis operationibus relucentem non gratè excipiemus? Aut quæ magis apposita exempla aliunde venabimur, quibus infirma hominum mentes ad hoc magnum mysterium percipiendum juventur, & contra blasphemas Atheorum cavillationes in ejus fide muniantur, si hæc clarissima à Mathematicis petita vel respuimus, vel saltem negligimus? Jam alibi monui* (in præf. Demonstr. Vivianeorum Problem.) *quantùm ad illustrandas superiores Veritates Geometricæ conferant Cognitiones, & ipsiusmet Procli Diadochi testimonio id comprobavi, quod non piget hoc loco repetere.* Theologiæ,

logiæ, *inquit*, intelligentes apprehensiones Mathematica præparat: quæcunque enim imperfectis scrutatu difficilia, arduaque ad veram Divinorum cognitionem videntur, hæc Mathematices rationes credibilia, & manifesta, & certa per imagines ostendunt.

Aliunde igitur, quàm ab hac prætensa libelli mei emendatione, gloria sua materiam bonus Censor quærere studeat, aut certè alios errores indigitet, quos ubi tales esse persuaserit, non sine grati animi erga Monitorem significatione, corrigere conabor: hunc verò tantum abest, ut inter errores censendum agnoverim, ut in publicis physicis prælectionibus meis, quoties de Mundi origine sermo recurrit, post confutatam Materię æternitatem, non alia umquam analogia creationem ipsius captu possibilem ostendere consueverim, quàm ex hisce analyticis, aut arithmeticis operationibus, quæ rem aptissimè illustrare mihi videntur; sic enim habeo De Cęlo, et Mundo lect. 4.

Quicunque ad infinitam Dei virtutem attenderit, nihil ipsi repugnare deprehendet, ut quidvis è nihilo efficiat: quod ut clariùs per quandam analogiam percipiamus, physicam actionem cum arithmetica numerorum efficientia conferre liceat, Auditores humanissimi. Si numerus quidam in alium ducatur, qui ex utriusque multiplicatione resultat, productus ab iisdem factoribus, seu coefficientibus, dicitur: sic ternarius quaternarium multiplicans duodenarium producit; si verò hic productus per alterutrum factorum dividatur, quotiens resultat alter coefficientium, ex cujus multiplicatione cum altero prodierat, ut si duodenarium per ternarium dividas, quaternarius pro quotiente prodibit, adeout divisio idipsum retexat, quod multiplicatio conficit, & multiplicatio reficiat, quod divisio destruxerat. Hoc animadverso, cogitemus oportet, quemvis numerum eò minorem fieri, quo vicissim per majorem ipse dividitur: sic minor est pars una centesima, quàm decima, & minor millesima, quàm centesi-

 ma, &c.

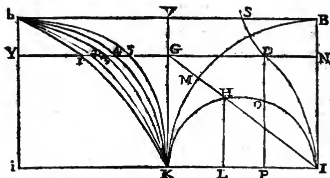
ma, &c. nimirum unitas minor evadit divisa per centenarium, quàm per denarium, & minor adhuc evadit divisa per millenarium, quàm per centenarium (& quidem exactè in reciproca ratione divisorum fractiones decrescunt) adeòut si intelligatur unitas per majorem, ac majorem numerum dividi, ad minorem, & minorem semper quantitatem reducatur; quodsi igitur eam dividi intelligimus per numerum absolutè infinitum, seu majorem quolibet assignabili, fiet ipsa qualibet assignabili magnitudine minor, adeoque ad merum nihil (respectivum scilicet, eo sensu, quo quantitas infinities minor alia, est ad hanc ut o ad 1. *per prop. 3. de Infinit. Infinitor.*) redacta erit, in eoque statu perseverare intelligetur, usquedum per ipsummet infinitum numerum, per quem divisa fuerat, rursus multiplicetur: ut enim unitas per centenarium divisa, si per numerum quemlibet centenario minorem multiplicetur, pristinum unitatis integræ statum non recuperat, sed ad hoc exigit ejusdemmet centenarii multiplicationem: ita ad hoc ut nihil illud, residuum ex divisione unitatis per numerum infinitum, rursus evadat aliquid, debet omnino per eundem infinitum numerum multiplicari, nec numerus infinito minor id unquam præstabit. Manifesta est igitur Infiniti numeri virtus, ut quodlibet per divisionem destruat, & in nihilum redigat, rursusque ut ex nihilo quidlibet restituat, per multiplicationis efficaciam illud producendo. Quo sanè exemplo constat, etiam concipi posse, Dei Opt. Max. infinitam Virtutem eò se extendere, ut quidvis in nihilum redigere, quidvis ex nihilo producere valeat, adeoque per creationem propriè dictam potuisse Mundi hujus aspectabilis materiam è nihili sinu excitare, qua in varias formas deinceps disposita, singulas Mundi partes distinxerit, ornaverit, suisque numeris absolutas, perfectasque reddiderit. *Hæc ibi ad hujus mysterii explicationem attuli, eademque ad hoc propositum adnotasse sufficiat.*

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Q*Uadraturam Circuli* prop. *6. propositam*, *iterum per Infinitas Parabolas demonstrare*.

EST enim circulus circa diametrum I*K*, vel quadrans *K* MBI, *per Corol.* 1. *Prop.* 4. æqualis spatio VSDIK, nimirum *per Coroll. Prop.* 7. æqualis *b* 1 K *i*, + *b* 2 K 3 *b*, + *b* 4 K 5 *b*, &c. hoc est quadrato *b i* KV, minùs trilineo



parabolæ *b* 1 KV, plus trilineo secundæ Parabolæ, minùs trilineo tertiæ &c. sunt autem illa trilinea circumscripti quadrati (B), [C], (D), [E] &c. per ordinem, ut patet ex dictis *cap.* 8. *Hugenianorum n.* 10; ergo posito eodem quadrato = 1, prodit circulus = (A) − (B) + [C] − (D) + [E] − &c. Quod erat demonstrandum.

(A) 1
[B] $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{5}$
[D] $\frac{1}{7}$
(E) $\frac{1}{9}$
&c.

COROLL. I. Quoniam parabola *b* 1 *K i* inscriberetur quadranti IBMK, aliæque eundem quadrantem circumplecterentur, patet, excessum quadrantis supra inscriptam parabolam æqualem esse Lunulis parabolicis *b* 2 K 3 *b*,

b 4 *K* 5 *b* &c. eidem quadranti adſcriptis.

COROLL. II. Nec minùs eadem methodo patet dimenſio cujuſvis ſectoris, putà ejus, cujus ſemiſſis eſſet MIK, quippe foret ille æqualis *y* 1 K *i* † 2 K 3 † 4 K 5. &c. unde patet Veritas Quadraturæ Circularis ſectoris ab eodem Clar. Leibnitzio propoſitæ in Actis Lipſiæ 1691. menſe Aprilis, pro qua & ſequentem Propoſitionem libet adjungere.

PROPOSITIO IX.

Circularis, vel Elliptici Sectoris Quadraturam loco mox laudato à Summo Geometra exhibitam demonſtrare.

Sit radius AB = 1, tangens BC = x, arcus circuli BD = y, ducta infinitè proxima ſecante Adc, cum arcu CE concentrico, ponatur Dd = dy, undè Cc = dx, ſecans AC = (Q). Jam Dd ad Cc eſt in ratione compoſita ex

D d ad EC, ideſt 1 ad [Q], & EC ad C c, nempe rurſus 1 ad (Q), adeòque eſt ut 1 ad 1 † xx, nempè ut quadratum radii ad quadratum ſecantis; ergo cum ſit 1 † xx . 1 : : dx . dy, erit hæc = [F] videlicet per dicta *in Hugenianis cap.* 10. *n.* 5. = differentiæ ſeriei x — (G) + [H] — (I) + [K] — &c. unde hęc ipſa ſeries = integrę y, & ductâ fingendo tangentem CK, ut interceptus arcus BK ſit duplus BD, & ſector BAK æqualis rectangulo radii in ſemiarcum BD, fiet ejuſmodi ſector = x — (G) + (H) — (I) + (K) — &c. quæ eſt Quadratura Leibnitzii loc. cit.

$$(Q)\ \sqrt{1+xx} \qquad [F]\ \frac{dx}{1+xx}$$

$$(G)\ \frac{x^3}{3} \qquad (A)\ 1$$

$$[H]\ \frac{x^5}{5} \qquad [B]\ \frac{1}{3}$$

$$(I)\ \frac{x^7}{7} \qquad (C)\ \frac{1}{5}$$

$$[K]\ \frac{x^9}{9} \qquad [D]\ \frac{1}{7}$$

$$(E)\ \frac{1}{9}$$

Et quoniam, ubi ſector BDKA ſit quadrans Circuli, angulus BAC ſemirectus evadit, & tangens BC æquatur radio BA, nempe ipſa x = 1, tunc ſeries præfata mutatur in hanc ſimpliciorem, videlicet [A] — (B) + (C) — [D] + (E) — &c. qualem *prop.* 6. *&* 8. jam demoſtravimus.

Ellipſi autem BOL circa eandem tranſverſam diametrum poſita cum circulo BDK, quia tam ſegmentum BDI ad BOI, quàm triangulum DIA ad OIA, adeòque & ſector BDA ad ſectorem BOA, eſt in ratione DI ad IO, ſeu KA, vel BA ad AL, necnon tangentis FB ad BH, utique ſi non jam AB, ſed AL ſit = 1, & AB = a, nec jam BF, ſed BH = x, prodibit idem ſector ellipticus BOA = ax — a(G) + a (H) — a (I) + a (K) &c. ut Maximus ævi noſtri Geometra ſæpe citato loco determinavit, noſque demonſtrandum ſuſceperamus.

COROLL. Hinc conſtat, quòd, ubi x = 1, ſeu tangens BH = AL, habetur quadrans ellipſis BLA = BAL rectangulo, minùs ejus triente, plus ejus quinta parte &c. ut in circulo ad circumſcriptum quadratum relato contingit.

SCHO-

SCHOLION.

Restat, ut cùm similem seriem de sectore hyperbolico ibidem Vir Cl. dederit, nos illam demonstrare non differamus, quod post expositas nostras de Hyperbola per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas quadranda cogitationes, præstabimus, ad id nos invitante olim, nostrasque curas promovente Egregio Juvene Gabriele Manfredio, cujus doctissimam hac de re Epistolam tum in medium adducam, quàm ferax sit Ingeniorum ad Geometriam, & Analysim factorum Italia, locupletissimo apud Exteros testimonio futuram.

Sed priùs ostendere aggrediar alium Circuli Tetragonismum, ex infinita serie quorundam rectangulorum deductum à Celeberrimo Philosopho, & Geometra Renato Des Cartes, quæ post primam nostri hujus libelli editionem, inter ejus Opera posthuma, Amstelodami anno 1704. vulgata fuit pag. 6. Excerptorum ex MSS. *ad calcem Voluminis: eaque sic procedit.*

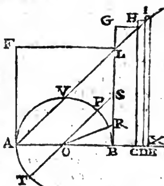
Ad quadrandum circulum, *inquit*, nihil aptius invenio, quàm si dato Quadrato BF adjungatur rectangulum CG, comprehensum sub lineis AC, & CB [*ductam quippe suppono diametrum AL, eamque ulterius productam, ut ob angulum semirectum LAB, singulæ parallelæ BL æquentur suis distantiis à puncto A*] quod sit æquale quartæ parti quadrati BF: item rectangulum DH, factum ex lineis DA, DC, æquale quartæ parti præcedentis: & eodem modo rectangulum EI, atque alia infinita, usque ad X, quæ omnia simul æquabuntur tertiæ parti quadrati BF [*nam series quadrupla est sesquitertia primi termini, ut sæpe*

dictum

dictum est, ac demonstratur ab Archimede De Quadr. Parab. prop. 23. *unde superat primum terminum ipsius triente*] Et hæc linea A X erit diameter circuli, cujus circumferentia æqualis est circumferentiæ hujus quadrati B F: est autem A C diameter circuli octogono, quadrato B F isoperimetro, inscripti: A D diameter circuli inscripti figuræ 16 laterum, A E diameter inscripti figuræ 32 laterum, quadrato B F isoperimetræ; & sic in infinitum.

Quod sic demonstro. Sit B S semilatus cujusvis polygoni (ut hic quadrati) circulo diametri B A circumscripti, & secans S O producatur ad circumferentiam in T; erit S T diameter circuli inscripti polygono dupli numeri laterum, ut in hoc casu octogono, isoperimetro eidem priori polygono: bifariam quippe secto angulo S O B per lineam R O, erit utique R B semilatus polygoni duplo laterum numero circumscribentis eundem circulum diametri B A; est verò (3. 6. elem. *) S O ad O B, vel O T, ut S R ad R B, & componendo S T ad T O, ut S B ad B R, & sumptis consequentium duplis, S T ad T P, seu B A, ut S B ad duplam B R, hoc est ad integrum latus polygoni (quod nunc erit octogonum) duplo laterum numero circa circulum diametri B A descripti; est autem S B semilatus primi polygoni [nempe hic quadrati] latus integrum polygoni isoperimetri, duplo laterum numero descripti, ut constat, nam S B octava pars est perimetri quadrati B F, & sic in aliis proportionaliter, patet semilatus octogoni esse partem sextamdecimam ejus perimetri, adeoque æquari lateri integro figuræ isoperimetræ 16 laterum, &c., ergo S T ad A B est, ut latus integrum polygoni duplo laterum numero descripti, & isoperimetri priori polygono, ad latus integrum polygoni duplo laterum numero circumscribentis circulum diametri A B; quare cùm A B sit diameter circuli, cui circumscribitur polygonum dupli laterum numeri, cujus semilatus B R, erit etiam S T diameter circuli inscripti polygono similiter dupli laterum numeri, & isoperimetri eidem primo polygono; Quod erat demonstrandum.*

Est



Est autem rectangulum T S P æquale quadrato semilateris B S, adeoque æquale quartæ parti quadrati B F, sive, ex Constructione Cartesiana, *æquale rectangulo A C B, & additis utrobique æqualibus quadratis O P, O B, fient quadrata O S, O C æqualia, unde & tota S T æquatur ipsi A C; quare erit A C diameter circuli inscripti octogono isoperimetro quadrato B F.*

Similiter ostendetur A D æqualis diametro circuli inscripti figuræ 16 laterum isoperimetra octogono præcedenti, adeoque & eidem quadrato B F, eo quòd A D C æquetur quartæ parti rectanguli A C B, seu A S P, vel quadrati B S, à latere prædicti octogoni isoperimetri descripti, adeoque A D C æquetur quadrato dimidiæ B S, unde facto super A C semicirculo inscripto octogono lateris B S, & ad ejus lateris bisectionem ducta ex centro secante, usque ad peripheriam extensa, ostendetur hæc = A D, ut prius ostensa est S T = A C.

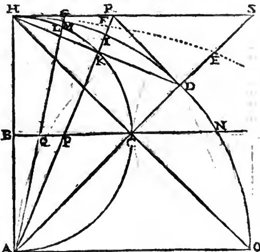
Eodem modo erit A E diameter circuli inscripti polygono 32 laterum, prioribus isoperimetri; & sic procedendo habebitur ulterius diameter polygoni isoperimetri laterum 64, mox 128, & sic in infinitum; neque invenietur terminus X hujus progressionis, nisi ubi fuerit demum A X æqualis diametro circuli inscripti polygono infinitorum laterum, isoperimetro eidem quadrato B F; hujusmodi verò polygonum infiniti-laterum est ipsemet circulus; ergo A X est diameter circuli isoperimetri eidem quadrato B F.

Et quia ex Galilæo, Dial. 1. de nov. Scien. *Circulus est medius proportionalis inter polygonum sibi circumscriptum, & aliud simile ipsi isoperimetrum, erit circulus diametri A X medio loco proportionalis inter quadratum sibi circumscriptum, latere videlicet A X describendum, & quadratum ipsum sibi isoperimetrum B F, cujus latus B A; sive sumpta media proportionali*

inter

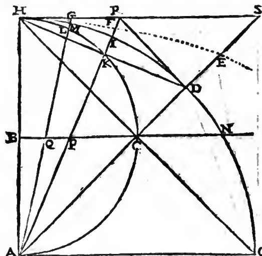
inter A X, A B, *erit hac latus quadrati æqualis circulo diametri* A X, *& absoluta erit circuli Quadratura*; *Sed in determinatione lineæ* A X *tota superest difficultas*, *huic enim in infinitum appropinquare licet*, *sed non penitus attingere illius terminum* X *ex communi Geometria dabitur*.

Nescio autem, an & aliam, circuli quadrandi rationem, qua nunc mihi menti obversatur, hac occasione proponã. Sit semicirculus HCA, & per ejus centrũ B ducta linea BN ad diametrum AH perpendiculari, describatur polo A, regula BN, intervallo BH Conchois Nicomedea HGFE: item centro A, radio AH quadrans circuli HMDO: sitque angulus HAC semirectus, quem bifariam dividat recta AK, & residuum KAH, item bifariam secet recta AL, & sic deinceps.



Erit quadratum inscriptum circulo ad circulum, in ratione composita ex AC *ad* AD, AK *ad* AI, AL *ad* AM, *& sic deinceps ex aliis chordis bisecantibus residuos angulos, ad radios circuli* AD; *Circulus verò ad quadratum circumscriptum erit in ratione composita ex* AD *ad* AE, AI *ad* AF, AM *ad* AG, *& sic deinceps ex aliis radiis bisecantibus residuos angulos, ad correspondentes ramos Conchoidis*: *qua rationes componentes, post aliquas bisectiones, ferè in rationem æqualitatis degenerant*: *id autem sic ostenditur*.

Nam si jungantur HCO, HKD, erit triangulum HCA ad triangulum HDA, ut AC ad AD: similiter juncta recta HLI, erit triangulum HKA ad triangulum HAI, ut AK ad AI: necnon ostendetur triangulum HAL ad triangulum HAM, ut AL ad AM, & sic semper; Erit autem triangulum HAC octava



pars quadrati inscripti circulo HDO, sicut triangulum HDA octava pars octogoni eidem circulo inscripti; at triangulum HKA erit sextadecima pars ejusdem octogoni, ut triangulū HIA sextadecima pars est figuræ 16. laterum eidem circulo inscriptę; triangulum autem HLA ejusdem figuræ 16 laterum pars trigesima secunda foret, idest præcisè, quota pars esset triangulum HMA figuræ 32 laterum eidem circulo inscriptæ; Quare polygonorum in circulo HDO descriptorum, erit quadratum ad octogonum, ut AC ad AD, octogonum ad figuram 16 laterum, ut KA ad AI, & figura 16 laterum ad figuram laterum 32, ut LA ad AM; Ratio igitur inscripti quadrati ad circulum, quæ componitur ex ratione quadrati ad octogonum, & hujus ad figuram 16 laterum, & hujus adhuc ad figuram laterum 32, & sic deinceps usque ad figuram infinitorum laterum, cujusmodi est ipse circulus, composita erit ex rationibus CA ad AD, KA ad AI, LA ad AM, & sic in infinitum.

Pari-

Pariter, cùm sit triangulum HAS octava pars Quadrati circumscripti circulo HDO, & quadrilaterum HRDA, cujus diameter AR bisecat angulum HAS, sit pariter octava pars circumscripti octogoni, erit quadratum ad octogonum, ut triangulum HAS ad quadrilaterum HRDA, idest ut SH ad duplam HR, vel ut SA † AH ad duplam AH, sive ut dimidia SA † dimidia AH, ad AH, nempe ut AC † CE, sive ut AE, ad AD; & sic eadem ratione ostendetur esse circumscriptum octogonum ad circumscriptam figuram 16 laterum, ut FA ad AI, & figuram laterum 16 ad figuram laterum 32, ut GA ad AM, & sic semper; quare circumscriptum quadratum erit ad circulum in ratione composita EA ad AD, FA ad AI, GA ad AM &c, utpotè in ratione composita quadrati ad octogonum, hujus ad figuram 16 laterum, hujus ad figuram laterum 32, & sic deinceps usque ad ipsum circulum, qui est figura infinitorum laterum. Quod erat demonstrandum.

Hinc patet, rationem ex EA, ad AC, & FA ad AK, & GA ad AL, & cæteris deinceps ramis concboidis ad chordas semicirculi, compositam, æquari rationi duplæ, qualis est circumscripti quadrati ad inscriptum eidem circulo.

Obiter hinc colligi potest novus modus, Conchoidem describendi, si nempe secantium AIR, ADS excessus IR, DS supra radios AI, AD, bifariam secentur in F, E, linea quippe incedens per puncta E, F, H erit ipsa Conchois Nicomedea: nam quia PR est medietas ipsius AR, si etiam RF sit medietas ipsius RI, utique residua PF erit medietas residuæ AI, hoc est æquabitur ipsi BH: eodem modo ostendetur etiam CE æqualis eidem BH, ergo curva HFE est Conchois, regula BN, intervallo BH descripta.

Hæc autem præsenti Scholio inserere visum fuit, licèt digna videri possent, quæ inter Propositiones recenserentur, ne ipsarum numerum, sæpe in operibus nostris citatum, augerem, ordinemque turbarem, ut editionis utriusque methodo, & dispositioni citationes omnes corresponderent.

EPIDOSIS.

ANtequàm ad alteram Libelli partem progrediar, oportunum duxi, aliàs vacaturum hujus pagellæ residuum implere, adducta demonstratione veritatis supra enunciatæ *pag.* 10. *ad finem*, de Solido Infinito ex Cissoide circa diametrum circuli genitoris revoluta: hoc enim, nullo schemmate adhibito (quæ methodi Leibnitzianæ præstantia est) ex sola hujus curvæ natura demonstrare possum,

$$[A]\ \frac{cxx}{a},\quad [B]\ \frac{cx^3}{aa-xa},\quad [C]\ \frac{cx^3dx}{aa-xa}$$

$$(D)\ \frac{cx^3dx}{aa},\quad (L)\ \frac{cx^4}{4aa},\quad (O)\ \frac{caa}{4}$$

$$[E]\ \frac{cx^4dx}{a^3},\quad [M]\ \frac{cx^5}{5a^3},\quad [P]\ \frac{caa}{5}$$

$$(F)\ \frac{cx^5dx}{a^4},\quad (N)\ \frac{cx^6}{6a^4},\quad (Q)\ \frac{caa}{6}$$

&c. &c. &c.

posita scilicet diametro $= a$, parte abscissa ab initio Cissoidis $= x$, & circumferentia genitoris circuli $= c$; erit enim $a-x$ ad x, ut (A) (nempe circulus radii x) ad [B] = circulo descripto ab ordinata Cissoidis, quo ducto in dx, prodit (C) elementum solidi ab ejusmodi revolutione producti, & hoc resoluto in seriem infinitam *per cap.* 10. *n.* 5. *Hug.* habetur [D] † [E] † [F] &c. cujus integrale [L] † [M] † [N] &c. = solido altitudinis x; & ubi $x = a$, fit integrum solidum [O] † [P] † (Q) &c. = Infinito, ob denominatores arithmeticè dispositos.

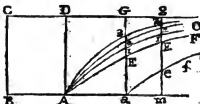


PARS

PARS ALTERA DE HYPERBOLA.

PROPOSITIO X.

INter asymptotos BCG per idem punctum A descripta sint infinita Hyperbola AEF prima, seu linearis ab Apollonio illustrata, A 1 1 secunda, seu quadratica, quæ Cl. Viviano Mesolabica dicebatur, A 2 2 tertia, seu cubica, A 3 3 biquadratica, aliæque altiorum graduum in infinitum, quas secet alteri asymptoto parallela E 1 2 3 G.



Dico ipsas AD, EG, 1G, 2G, 3G &c. esse continuè proportionales in ratione GC ad CD.

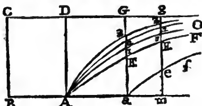
NAm ut GC ad CD, ita AD ad EG in prima hyperbola, & ut quadratum GC ad quadratum CD, ideft in duplicata priorum ratione, ita AD ad 1 G in hyperbola secunda, & ut cubus GC ad cubum CD, ita eadem AD ad 2 G in hyperbola tertia, hoc est in triplicata priorum ratione, atque ita deinceps, ergo ipsæ AD, EG, 1G, 2G, 3G &c. sunt continuè proportionales. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Isdem positis, sumatur GD aqualis distantia à centro DC, & per punctum G ordinetur communis aplicata GE.

Dico, spatium prima hyperbolę FEADGO, ad partes O infinitum, aquari aggregato ex infinitis spatiis omnium hyperbolarum per ipsum GE resectis, videlicet GEFO, † G 1 1 O, † G 2 2 O, † G 3 3 O &c.



COmpleatur rectangulum GDA*a*, & per punctum *a*, inter asymptotos ADG transeat hyperbola *aef* primæ AEF æqualis prorsus, & similis, ac similiter posita, imò eadem sola positione differens; eritque spatium O*fea*GO idem quod OFEADO. Ordinata igitur ubilibet *e*E 1 2 3*g*, quoniam, *per pracedentem*, est E*g* ad 1*g*, ut *g*C ad CD, erit per conversionem rationis *g*E ad 1E, ut *g*C ad *g*D, nempe in ratione composita ex *g*C ad DC (nempe DA ad *g*E) & DC, vel æqualis DG, ad *g*D (seu *ge* ad G*a* aut DA) hæ autem duæ rationes componunt illam, quæ est *ge* ad *g*E; ideoque = *g*E ad 1E, quare *per Propos.* 1. *ge* æqualis erit omnibus proportionalibus terminis E*g*, 1*g*, 2*g*, 3*g* &c. siquidem est tertia proportionalis post primam differentiam E1, & primam magnitudinem E*g*; Hoc ubilibet demonstrato, patet omnem ordinatam *eg* in spatio O*fea*GO æquari omnibus ordinatis aliarum hyperbolarum per ordinatam GE resectarum, adeòque & ipsum spatium O*fea*GO, vel illi æquale OFEADO, æquari prædictis infinitis hyperbolarum portionibus. Quod erat demonstrandum.

CO-

COROLL. Hinc ablato communi ſpatio OFEGO, ſpatium hyperbolicum DGEA, ordinatis proportionis duplæ interceptum, æquale erit infinitis ſpatiis quadrabilibus per reliquas hyperbolas determinatis, nempe G 1 1 O † G 2 2 O † G 3 3 O &c.

PROPOSITIO XII.

Sumpto parallelogrammo hyperbolæ inſcripto pro unitate, erit ſpatium hyperbolicum, ordinatis rationis duplæ interjectum, æquale ſeriei fractionum, in quibus unitas denominatur productis ſingulorum per ordinem numerorum in terminos rationis duplæ.

Id eſt $= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32}$ &c.

Quia enim *per prop.* 10. EG, 1G, 2G, 3G &c. ſunt continuè proportionales in ratione GC ad CD, quæ hîc eſt ratio dupla, erit & ſeries æquè altorum rectangulorum EGC, 1GC, 2GC, 3GC &c. ſeries rationis duplæ, cùmque EGC computetur pro unitate, erit 1GC = ſemiſſi, & 2GC = quadranti, & 3GC = octanti &c. ſed ex his, quæ demonſtravimus *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. ſpatium hyperbolæ ſecundæ G 1 1 O = inſcripto rectangulo, nempe ſemiſſi, & ſpatium hyperbolæ tertiæ G 2 2 O = ſemiſſi inſcripti rectanguli 2GC, adeòque $= \frac{1}{2.4}$, & ſpatiū quartæ hyperbolæ G 3 O = trienti rectanguli 3GC, atque adeò $= \frac{1}{3.8}$ &c. ergo agregatum ex illis hyperbolicis ſpatiis, ideſt *per Coroll. prop. præced.* ipſum ſpatium ADGE, ordinatis rationis duplæ in hyperbola primaria interjectū, = ſeriei in titulo propoſitæ. Quod erat &c.

COROLL. Quoniam Quælibet Hyperbolica ſpatia, ordinatis ad alteram aſymptoton interjecta, ſunt inter ſe, ut ratio-

rationes extremarum ordinatarum, ut oftendimus *in Hugenianis cap. 6. n.* 3. cognita ratione ordinatarum, quibus interjacent hyperbolica fpatia, cognofcetur eorum proportio ad fpatium interjectum ordinatis rationis duplæ, quarè data in præcedenti propofitione hujus dimenfio per infinitam feriem rationalem, quæ ejufdem valorem quantumvis accuratum determinat, inferviet etiam pro fimili dimenfione quorumvis propofitorum fpatiorum ab hyperbola refectorum.

SCHOLION.

H*Æc ad quadraturam Hyperbolæ* per Infinitas Hyperbolas quadrabiles *pertinent; fupereft, ut idem* per Infinitas Parabolas *affequi tentemus, id quod multò adhuc faciliùs, & expeditiùs obtinebimus; Nam hoc, ut præfati fumus, nobis olim palmarium fuerat, cùm fefe ut peregrinam menti noftræ hæc Veritas obtuliffet, quam demum inter Geometriæ Lares olim receptam deprehendimus; fed five novam, five antiquam horum mathematicorum receffuum incolam, fic illam nos adornamus.*

PROPOSITIO XIII.

H*yperbola A B inter afymptotos M C D exiftente, quibus fint parallelæ A E D, B E F convenientes in E, conjuncta verò ad centrum A C, fecante B F in G, ipfis C D, feu F E, & G E fumatur tertia proportionalis E H, & quarta E I, atque ita deinceps in infinitum.*

Dico

Dico, lineam F B æquari omnibus illis infinitis terminis E F, E G, E H, E I &c.

COmpletis enim parallelogrammis D A M, F B L æqualibus *per* 12. 2. *Conic.* erit F C ad C M, seu F G ad M A, vel F E, ut eadem M A, vel F E ad F B; quia ergo F B est tertia proportionalis post F G primam differentiam proportionalium terminorum, & F E primum terminum, erit *ex prop.* 1. F B æqualis omnibus simul prædictis terminis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIV.

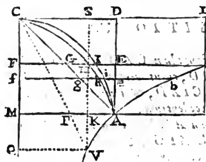
IIsdem positis, & intra triangulum C A D descripto trilineo parabola quadratica C H A D, cujus vertex A, tangens A D; item trilineo parabola Cubica C I A D, & aliis in infinitum altiorum graduum ex ordine succedentium.

Dico, Spatium Hyperbolicum A M F B æquari parallelogrammo M A E F, cum triangulo A E G, & trilineis parabolicis A E H, A E I, cæterisque deinceps per eandem ordinatam abscissis.

LIneæ siquidem F E, E G, E H, E I &c. erunt continuè proportionales, nempe correspondentes potestatibus abscissarum D A, A E ordinatim crescentibus, ergo *per prop. præced.* erit aggregatum ex ipsis equale toti F B: similiter ducta quavis alia parallela *f b*, ostendetur, hanc æqualem esse aggregato linearum correspondentium *f e*, *g e*, *h e*, *i e* &c. ergo omnes lineæ spatii hyperbolici M A B F æquales sunt omnibus lineis parallelogrammi M A E F, necnon omnibus Trianguli G A E, & trilineorum H A E, I A E &c. adeòque ex methodo Indivisibilium (quam in præsenti negotio, & in plerisque antecedentium Propositionum facilè ad Veterum exhaustionem reduces, loco linearum assumptis æquè altis parallelogrammulis figuras circumscri-

bentibus) spatium Hyperbolicum A M F B æquatur parallelogrammo, & Triangulo, Trilineisque parabolicis supra descriptis. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc habetur, idem Hyperbolicum spatium A M F B [vel huic æquale A D L B] æquari parallelogrammo AEF, cum semisse subsequentis AEG, & triente alterius A E H, & quadrante ipsius A E I, mox $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ &c. sequentium parallelogrammorum continuè proportionalium, quorum summa æquatur ipsi M F B N (ob basium æqualitatē prçostensam), Patet enim, cum ex aliis, tum ex nobis *cap. 8. Hugenianorum n. 10.* nedum triangulum G E A esse circumscripti sui parallelogrammi semissem, sed trilineum parabolæ Quadraticæ esse trientē, Cubicæ verò quadrantem, atque ita deinceps, suorum respectivè parallelogrammorum.



COROLL. II. Unde sequitur, complementum parallelogrammi M F B N, scilicet residuum spatium A b B N, æquari reliquo semissi parallelogrammi A E G, & duobus residuis trientibus parallelogrammi A E H, cum tribus quadrantibus sequentis A E I, & $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ &c. subsequentium.

COROLL. III. Hinc obvium est, arithmeticam seriem exibere dictis hyperbolicis spatiis æqualem, adeòque aream hyperbolicam numeris quam proximè exprimere, ad ipsius valorem cum noto rectilineo spatio comparandum, si videlicet, determinato, ut priùs, inscripto parallelogrammo A D C M pro unitate, & M A E F pro quavis ejus portione

[A] $\frac{a^1}{1}$	[M] $\frac{1}{2x^1}$
[B] $\frac{a^2}{2}$	(N) $\frac{1}{2x^2}$
[C] $\frac{a^3}{3}$	(O) $\frac{1}{3x^3}$
(D) $\frac{a^4}{4}$	[P] $\frac{1}{4x^4}$
[E] $\frac{a^5}{5}$	(Q) $\frac{1}{5x^5}$
(L) $\frac{1}{x}$	

tione = a, & conſequenter A E G = aa, A E H = a^3, AEI = a^4 &c. dicatur ſpatium A B F M = (A) † [B] † (C) † (D) † (E) &c., & AbBN = (B) † 2 (C) † 3 (D) † 4 [E] &c. Vel ſi mavis parallelogrammum M A E F ſuponere = (L) fiet ſpatium A B F M = (M) † (N) † (O) † (P) † (Q) &c. & AbBN = 1 (N) † 2 (O) † 3 [P] † 4 (Q) &c. Nimirum ſi A E ponatur ſemiſſis ipſius A D, ſpatium A B F M [jam terminatum ordinatis rationis duplæ) erit = $\frac{1}{2}$ † $\frac{1}{8}$ † $\frac{1}{24}$ † $\frac{1}{64}$ † $\frac{1}{160}$ &c. (quæ eſt ipſiſſima ſeries de qua *in prop.* 12. eandem æqualitatem oſtendimus) ſpatium verò AbBN = $\frac{1}{8}$ † $\frac{1}{12}$ † $\frac{3}{64}$ † $\frac{1}{40}$ &c.

PROPOSITIO XV.

E*Andem Quadraturam analytica oſtenſione confirmare, ejuſdemque cum Leibnitziana conſenſum aperire.*

ID non meliùs aſſequar, quàm ſi doctiſſimam Epiſtolam hoc loco reſcripſerim, qua id, pro ſua in me humanitate, præſtare aggreſſus eſt Geometriæ, & Analyticæ rei conſultiſſimus Adoleſcens, & de quo magna ſperare liceat, Gabriel Manfredius, Euſtachii Clariſſimi Mathematici, atq. Aſtronomi Præſtantiſſimi [cujus Tractatum de Curvis Planetariis Caſſinianis, cui dudum incumbebat, expectamus, otiumque ejus perfectioni neceſſarium ipſi apprecamur] in Patrio Bononienſi Archigymnaſio Matheſim publicè Profitentis, Digniſſimus Frater, quum illi meum hoc inven-

 tum

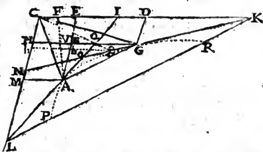
tum de more communicassem, eaque utrumque nostrum sollicitudo teneret, annon cum Leibnitziana Sectoris Conici Quadratura, *Actorum Lipsiæ 1691. Mense Aprilis* proposita, consonum esset; [Neutro scilicet nostrum in Cl. Mercatoris operibus tale quid de Hyperbolæ Quadratura jam diù propositum esse suspicante, quod postmodùm animadvertimus, ut in Præfatione jam dictum est] ostendit enim, ex iisdem Leibnitziani Calculi principiis, Aream Hyperbolæ, tum ad nostram, tum ad Leibnitzianam seriem reduci posse. Ne verò Tyronibus Geometricis salebrosior ejus ostensio videatur, ubi paulò pressiùs arguit, asteriscos apponam parenthesi inclusos, iisque ex ordine respondebunt Notæ ad calcem Epistolæ subnectendæ, quibus omnem deductionis vim in aperto posuisse me arbitror.

GABRIELIS MANFREDI

EPISTOLA AD AUCTOREM,

Propositionis hujus demonstrationi inserviens.

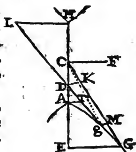
Vir Clariss.



S*It inter asymptotos C L, CK Hyperbola AG, cujus puncta quævis duo A, & G, & per G fit asymptoto C K parallela G H, nec non per A asymptoto L C parallela AE, ipsā G H secans in B, C K verò in E, & supponatur ipsi B G infinitè*

mitè proxima bg, *& per* b *ad BG normalis* bV; *per A verò ad CK normalis AF: ponaturque* $AE = 1$, $CE = a$, $AF = b$, $AB = x$, *unde* $BE = 1 - x$, *&* $BG = \frac{ax}{1-x}$, *&* $Bb = dx$; *quare propter similia triangula EAF, BbV, erit* $bV = bdx$, *quæ ducta in BG, sive bg, dat spatiolum BbgG* $= \frac{abxdx}{1-x} = abxdx + abx^2dx + abx^3dx + abx^4dx + abx^5dx$ *&c.* [*1] *Quæ series est differentiale seriei* $\frac{abxx}{2} + \frac{abx^3}{3} + \frac{abx^4}{4} + \frac{abx^5}{5} + \frac{abx^6}{6}$ *&c.* (*2) *quare series hæc erit æqualis spatio ABG, quod tuæ subtilissimæ inventioni adamussim consonat.*

Sed & Leibnitziana similiter ostendetur Quadratura. Esto enim axis Hyperbolæ GA ipsa recta CAE, & ejus quidem semitransversum $CA = a$, *semisecundarium verò* $CF = 1$, *& assumpto quovis puncto Hyperbolæ G, eique proximo g, jungatur CG diameter, eique proxima alia Cg, & juncta Gg [quæ tangens erit] secante axem in D, ducatur ex D ad CG perpendicularis KD, & portio lineæ AT, quæ continetur inter A, & tangentem [si sit AT ad CE normalis in A] sit* $= x$, *erit* $CE = \frac{axxta}{1-xx}$ (*3) *cujus differentiale* $= \frac{4axdx}{1+x^4-2xx}$ *& GE* $= \frac{2x}{1-xx}$ [*4] *cujus differentiale* $= \frac{2dx + 2xxdx}{1+x^4-2xx}$ [*5] *quorum differentialium quadratorum summa dabit lineolæ Gg quadratum, quæ proinde lineola erit* $\frac{2dx\sqrt{4aaxx+1+x^4+2x^2}}{1+x^4-2xx}$ [*6] *seu posita quantitate* $\sqrt{4aaxx+1+x^4+2xx} = c$, *erit*



erit $Gg = \frac{2cdx}{1 + x^4 - 2xx}$; *erit autem* CD, *propter tangentis Hyperbolæ proprietatem*, $= \frac{a - axx}{xx + 1}$ [*7] *unde propter similia triangula* CGE, CDK, *erit* KD *equalis*

$$\frac{2ax - 2ax^3}{1 + xx\sqrt{aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx}}$$

[*8] *& cùm sit* $GD = \frac{2xc}{1 - x^4}$ [*9] *erit* Mg (*arcus circuli, centro* C, *intervallo* Cg *descriptus*) $=$

$$\frac{2adx}{\sqrt{aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx}}$$

[*10] *Quæ quantitas* Mg *ducta in* CG *dat duplum trianguli* CGg, *quod proinde triangulum erit* $= \frac{adx}{1 - xx}$ [*11] *hoc est* $= adx + axxdx + ax^4dx + ax^6dx$ &c. *cujus seriei cùm sit integrale* $ax + \frac{ax^3}{3} + \frac{ax^5}{5} + \frac{ax^7}{7}$ &c. (*12) *sequetur, hanc seriem æquari sectori* CGA, *prorsus ut Leibnitzius cit. loco. Idemque proportionaliter Circulo, & Ellipsi applicabitur.*

Debet igitur necessariò tua ingeniosa inventio cum iis, quæ D. Leibnitzius ostendit, coincidere, nec mihi ampliùs dubium erit, quin vestrum utriusque mentem sim assequutus, quas in Veritatem unanimiter conspirare tandem deprehendi.

Te Vir Cl. ...... *&c.*

NOTÆ IN PRÆCEDENTEM EPISTOLAM.

NE iterum cogamur fractiones repetere cum nimio Typographi incommodo, illas subinde significabimus per asterismos adnexos, itaut quilibet asterismus cum numero

mero conjuncto denotet, vel seriem, vel simplicem fractionem, quæ immediatè præcedit similem asterismum in Epistolæ textu.

(* 1) Quoniam videlicet series hæc ducta in 1. producit seipsam, ducta verò in $-x$ dat $-abx^2\,dx - ab\,x^3\,dx - ab\,x^4\,dx$ &c. ubi omnes termini elidunt singulos prioris seriei, integro solùm remanente $ab\,x\,dx$ numeratore fractionis illius, cui hæc series in Epistola æqualis asseritur. Vide *nostra Hugeniana Theoremata cap.* 10. *n.* 5.

(*) Differentia enim cujusvis potestatis indeterminatæ x est eadem potestas ducta in suum exponentem, & una ejus dimensione differentiata, quantitatibus constantibus, quibus afficitur, invariatis, quippe quarum nulla est differentia ut ostensum est *in Tractatu de Infinit. Infinitor. in Schol. prop. V:* itaque differentiando hanc seriem prodit illa præcedens $ab\,x\,dx + ab\,xx\,dx + ab\,x^3\,dx$ &c.

[* 3] Sit enim integra diameter transversa ACH, & tangens GD producta occurrat HL tangenti oppositæ Hyperbolæ in L; erit *per* 42. 3. *Conic.* TA in HL = quartæ parti figuræ, seu quadrato secundæ semidiametri CF, nempe = 1; unde cùm AT sit = x, erit HL = 1 divisæ per x; itaque $1 - xx$ erit HL in AT minùs AT quadrato, seu HL − AT in AT; & $1 + xx$ erit HL in AT + AT quadrato, seu HL + AT in AT; quare $1 - xx \,.\, 1 + xx$ :: HL − AT . HL + AT :: HD − DA . HD + DA :: AC + CD − DA . HA :: 2CD . 2CA :: CD . CA :: CA . CE [37. 1. *Conic.*] :: a . CE æqualem fractioni propositæ.

[* 4] Quia proportionalium EC, AC, DC etiam differentiæ sunt proportionales, erit EA . DA :: EC . AC, vel CH, & componendo, ac convertendo, AD . DE :: CH . HE :: $a \,.\, a +$ [* 3], quod instituta divisione per a, & multiplicatione per $1 - xx$ dat $1 - xx \,.\, 1 - xx + xx + 1$ :: $1 - xx \,.\, 2$; cum ergo in eadem ratione AD . DE sit AT seu x ad EG, erit hæc = fractioni propositæ.

[* 5]

(* 5) Cujusvis enim fractionis differentia est factum ex denominatore in differentiam numeratoris, minùs facto ex numeratore in differentiam denominatoris, utroque diviso per denominatoris quadratū: putà differentia ipsius $\frac{n}{m} = \frac{mdn - ndm}{mm}$ itaque differentia ipsius [* 4] = aggregato $2dx - 2xxdx + 4xxdx$ (nempe $2dx + 2xxdx$) diviso per quadratum residui ex $1 - xx$, ut denotat fractio hic assignata: quemadmodùm & supra ipsius (* 3) differentiale positum est quod resultat ex divisione $4xdx$ per $1 + x^4 - 2xx$, quia $2axdx - 2ax^3dx + 2ax^3dx + 2axdx = 4axdx$.

(* 6) Quadratum enim fractionis positæ in Epistola paulò post (* 3) = $16aaxxdx^2$ diviso per quadratum ipsius $1 + x^4 - 2xx$, & quadratum alterius fractionis, quæ in Epistola adducitur paulò post (* 4) est trinomium $4dx^2 + 4x^4dx^2 + 8xxdx^2$ divisum per quadratum ejusdem $1 + x^4 - 2xx$, adeòque utrumque = polynomio $16aaxxdx^2 + 4dx^2 + 4x^4dx^2 + 8xxdx^2$, cujus radix est quæ hìc assignatur.

(* 7) Visum est enim *num.* 3. esse $xx + 1$ ad $1 - xx$, ut CA idest a, ad CD, quæ propterea erit, ut hìc notatur.

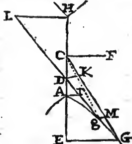
(* 8) Nam CG est radix quadratorum CE, & GE, idest (* 3), & (* 4) ergo CG, æqualis radici polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$ divisæ per $1 - xx$, est ad GE (* 4), ut CD [* 7] ad D*K* æqualem fractioni propositæ.

(* 9) Etenim DA = CA − CD = a − (* 7) = $axx + a - a + axx$ divisis per binomium $xx + 1$, seu = $2axx$ per idem binomium diviso; est autem CD = [* 7] ad CA = a, ut ipsa DA ad AE, quæ ideò prodit $2axx$ divisum per $1 - xx$, undè tota DE fit summa ex $2axx$ diviso per $xx + 1$, & ex eodem diviso per $1 - xx$; quod relinquit $4axx$ divisum per $1 - x^4$; Jam, ut differentia CE = fractioni, quæ in Epistola subjungitur post (* 3) ad

C*g*

$Cg = 2c\,dx$ diviso per quadratum ipsius $1 - xx$, ita DE, = fractioni nuper inventæ, ad DG = (* 9), ut proponitur.

(* 10) Ob proportionales GD. DK :: Gg. gM, fit [* 9] ad $2ax - 2ax^3$ divisos per factum ex binomio $1 + xx$ in radice polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$, ut $2c\,dx$ divisus per quadratum ipsius $1 - xx$ ad aggregatum $2a\,dx - 2ax^4\,dx - 2axx\,dx + 2ax^6\,dx$ divisum per productum ex polynomio $1 - xx - x^4 + x^6$ in radicem polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$, quæ fractio evadit tandem = (* 10) dividendo numeratorem per $1 - xx - x^4 + x^6$



(* 11) Quippe ex dictis *num.* 8. CG = radici polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$ divisæ per $1 - xx$, quæ ducta in Mg dat pro rectangulo duplum propositæ fractionis, cujus adeò dimidium triangulum elementare CGg eidem fractioni adæquatur.

(* 12) Hæc reductio in infinitam seriem trianguli elementaris, ejusque integratio pro valore Sectoris Hyperbolici, patet ex jam notatis in simili *ad num.* 1. & 2. Quarè manifesta sunt omnia Viri Clarissimi Pronunciata: Quæ tamen nolim pro Viris in Geometriæ adyta jam admissis, sed pro Tyronibus tantùm notata esse; itaque.

Qui satis hæc novit, ne sibi dicta putet:
Quamquàm adhuc longè pluribus dicendum esse vereor:
Qui neque sic capiunt, non sibi dicta putent.

MONITUM.

DUm nuper Florentia transirem, Pisas rediturus, apud Celeberrimum Magliabechium Acta Eruditorum Lipsiæ anni 1708. cursim videre licuit, in quibus novam

Analyticarum operationum expressionem, typographis magis commodam, ab Illustri Leibnitzio propositam, usurpari animadverti, cum voto, ut Geometræ omnes in eadem signa consentire velint. Idem & mihi proposuerat ipse Leibnitzius, doctissimis litteris suis datis Hanoveræ 21. Julii 1705. quibus Opusculum hoc nostrum tetragonismicum commendabat; sed non ausus sum ad praxim deducere, ne tam frequens signorum mutatio confusionem pareret; nunc autem, cùm eadem Leibnitziana signa recepta apud Germanos videam, nihil vetabit, quominus eorum usum & apud Italos primus ipse promoveam.

Itaque pro vinculo conjungente aliquod polynomium, parenthesim deinceps apponam; pro signo divisionis, duo puncta adhibebo, quibus distinguetur numerator à denominatore fractionis; pro multiplicationis indice, inter duo distincta membra coefficientia, unum comma apponetur, nisi simplex illorum juxtapositio id satis expresserit.

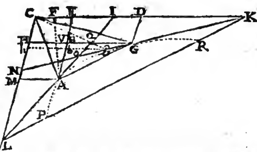
Exempli causa $a:b$ denotabit a divisum per b; unde etiam $c:e = f:g$ indicabit fractionem ex c diviso per e æquari fractioni ex f diviso per g; sive etiam [quod æqualitas fractionum poscit] esse c ad e, ut f ad g; unde sępe non alio indigebimus signo proportionalitatis, cùm idem inservire possit ad æqualitatem rationum indicandam, quod absolutarum quantitatum æqualitatem referre jam solet. Rursus ubi inveneris $xx:(a+x)^2$, intelliges xx divisum per quadratum totius complexi $a+x$; item $[2a-x]^2-xx]:(2a-x)^2$ significabit complexũ ex quadrato ipsius $2a-x$, & ex $-xx$ dividendum per quadratum complexi ex $2a-x$; Similiterque $x^{1:p}$ denotabit ipsius x talem potestatem, quam indicat unitas divisa per p; eademque ratione $(a+x)^{n:m}$ exprimet complexi $a+x$ talem potestatem, qualem refert n divisum per m. Pariter $\sqrt{(aa+xx)}$ stabit pro radice eruenda ex binomio $aa+xx$. Quoties occurret $ce+f(g+b)$ indicabit ad quantitatem ce addi debere factum

ex f

ex *f* in complexum *g* † *b*; quod si totum *ce* † *f* multiplicandum fuisset per *g* † *b*, scripsissem [*ce* † *f*], (*g* † h). Ut multiplicetur verò *ab* in factum ex *e* † *e* ducto in radicem *aa* † *ae*, scribetur *ab*, (*e* † *e*), √(*aa* † *ae*). Sic semper ad ad indicandum factum ex pluribus quantitatibus invicem multiplicatis, commate inter singula membra posito, res expedietur: excipio numeros, in quibus multiplicatio de more indicabitur insertis punctis, ut 2. 3. 4. significat factum ex his tribus invicem ductis, nempe 24. Tandem ubi occurrent series plurium fractionum, aut illas more solito interpositis lineis indicabo, nec enim spatia typorum valdè turbabunt, si extra textum litterarum in una serie totam aliquam lineam occupante disponantur; vel si ipsas Leibnitziano modo consignare libuerit, punctû cum commate interponam singulis, ad eas distinguendas: ut $by^m : c$; † $ae^m : n$; † $af^m : p$ significabit fractionem ex by^m diviso per *c*, cum alia fractione ex ae^m diviso per *n*, cum alia rursus in qua af^m dividitur per *p* &c.

PROPOSITIO XVI.

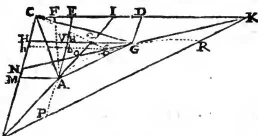
Idem consensus cum Cl. Leibnitzio breviùs, & immediatiùs proponitur.



Sint eadem, quæ in primo §. Ingeniosissimæ Epistolæ superiùs adductæ, nisi quòd supponendus est C A sectionis axis = *c*, AL verò, aut AI tangentis portio vertici & asymptotis interposita (quæ &

 æqua-

æquatur semiaxi conjugato *per* 1. 2. *conic.*) esto = 1, adeòque AE non jam pro unitate computetur, sed sit = a (uti & CE illi in hoc casu æqualis) fiet jam $bV = bdx:a$, item $HG = aa:[a-x]$ (ut ex simplici linearum proportionalitate patet) itaque spatiolum $GgbH = abdx:(a-x)$ idest $= bdx$; † $bxdx:a$; † $bxxdx:aa$; † $bx^3dx:a^3$ &c. cujus Integrale, nempe spatium AMHG $= bx$; † $bx^2:2a$; † $bx^3:3aa$; † $bx^4:4a^3$ &c. ut habet quadratura à nobis superiùs tradita.



Verùm ob proportionales IC: CA = IA: AF [propter triangulum CAI rectangulum simile ipsi CAF) est $2a.c::1.b=c:2a$, quo valore loco b substituto in quantitate $abdx:[a-x]$ designante, ex dictis, spatiolū elementare $GgbH$, evadet hoc spatiolū $= cdx:(2a-2x)$, & multiplicando tam numeratorē, quàm denominatorem per 2, mox denominatori addendo $xx-xx$ (quod non variat valorē, cùm sit = o) fiet $2acdx:[4aa-4ax$ † $xx-xx]$ seu $2acdx:(2a-x)^2-xx) =$ dicto spatiolo.

Ita enim supponēdum in figura, licet id non exprimat.

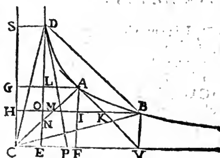
Cùm sit autem KL parallela GA *per* 44. 3. *Conic.* ut LA ad AO, ita KG ad GO, vel IQ ad QO, & summa antecedentium LA † IQ ad summam consequentium AQ, seu ob parallelas, LM † CH ad HM nempe $2a-x$ ad x:: LA, idest 1, ad AO $= x:[2a-x]$ quam vocemus t; ergo ipsius t differentia $dt = 2adx:[a-x]^2$ ejusque quadratum $tt = xx:[2a-x]^2$, & $1-tt = [2a-x]^2-xx$: $(2a-x)^2$, & $cdt = 2cadx:(2a-x)^2$, & demum $cdt:[1-tt] = 2cadx:(2a-x)^2-xx) =$ spatiolo $GHbg$, quod resolvendo de more in seriem infinitam,

pro-

prodit $c\,dt \dagger ctt\,dt \dagger ct^4\,dt \dagger ct^6\,dt$ &c. cujus integrale jam erit $ct; \dagger ct^3 : 3; \dagger ct^5 : 5; \dagger ct^7 : 7$ &c. prorſus ut Clariſſimus Leibnitzius determinavit, æquale ſpatio AMHG, ſive ſectori hyperbolico ACG, cui illud æquatur, ob triangula CHG, CMA æqualia, & commune ablatum HRC, ac utrique additum ſpatium ARG. Patet igitur noſtrarum ſpeculationum conſenſus cum profundiſſimis Summi illius, & Incomparabilis Geometræ cogitatis, quamquàm haud putarim per tot ambages ipſum proceſſiſſe, ſed longè ſimpliciori demonſtratione [illi fortè affini, quam pro Circulari, & Elliptico ſectore *prop.* 9. jam dedimus] in Veritatis hujus cognitionem veniſſe.

SCHOLION.

Simile quid de Hyperbola Cl. Hugenius propoſuit in diatriba de cauſa gravitatis; *ſupponens enim DAB hyperbolam æquilateră, cujus ſemiaxis CA, aſymptoti SC, CV, ductaque tangente $AV = AC = 1$, ac juncto quovis alio ramo CB, ſecante AV in* K, *ſi AK vocetur* a *(quę erit minor unitate) fiet ſector ACB ad triangulum ACV, ut ſeries* $a; \dagger a^3 : 3; \dagger a^5 : 5; \dagger a^7 : 7$ *&c. ad* 1. *Quod ipſum de inſcripto quadrato AGCF, eidem triangulo CAV æquali, & de ſegmento AGHB, vel AFVB binis ad aſymptoton ordinatis interjecto [nam alterutrum eidem ſectori ACB æquatur ex dictis* in Tract. de Infin. lemm. 1. Epiſtolæ Geometr.] *intelligendum pariter voluit; Nec admodum diverſa eſt demonſtratio.*



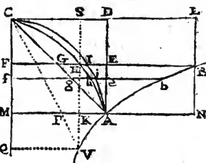
MO-

MONITUM.

Absolutam vides, Mi Lector, Hyperbolæ per infinitas parabolas Quadraturam, & extra cujuslibet dubii discrimen jam positam, ostenso ejus cum Leibnitzianis speculationibus consensu; Ad methodi tamen confirmationem subdere placet aliquot aliunde nota ad Hyperbolæ mensuram pertinentia, quæ ex nostris hisce Propositionibus sponte sua profluunt. Exempli causa.

PROPOSITIO XVII.

Quodlibet Hyperbolicum spatium LCMAbB, Hyperbola, & Asymptoto infinitè productis interjectum, est magnitudinis absolutè infinita.



Quia enim in hoc casu idem parallelogrammum MADC circumscribitur, & triangulo CAD, & trilineis parabolicis CHAD, CIAD &c. erit, *juxta prop.* 14. spatium Hyperbolicum in titulo designatum æquale inscripto parallelogrammo semel integrè accepto, unà cum 1:2; 1:3; 1:4; 1:5; 1:6; 1:7; 1:8 &c. ejusdem. Verùm omnes hæ fractiones, quibus unitas per singulos numeros denominatur, æquales sunt infinitis unitatibus (nam tres primæ superant unitatem, & novem sequentes adhuc aliam unitatem excedunt, & 27. deinceps altera unitate rursus sunt majores, & 81. succedentes similiter

ter plusquàm aliam unitatem conficiunt, atque ita porrò sumptæ juxtà altiores potestates ternarii, ut observat V. Cl. Petrus Mengolus Bononiensis *in præf. libri de Quadrat. Arith.*) ergo & illud spatium Hyperbolicum longitudine infinitum æquivalebit infinitis numero parallelogrammis inscriptis, adeòque absolutè magnitudinis erit infinitæ, ut dudum alii demonstrarunt, & nos ipsi ostendimus *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. Quod erat &c.

COROLL. Spatia infinita ejusdem gradus, quantumlibet finita quantitate differant, sunt invicem æqualia: putà, spatium LCMAB, & spatium LCFB, utraque ad partes BL infinita, sunt exactissimè æqualia, licèt primum videatur superare secundum spatio MABF. Hoc quidem satis per se notum est intelligentibus quid sit Infinitum, neque id ullam apud Geometras dubitationis umbram suscipere potest, quum sciant, finiti ad infinitum nullam esse rationem, proindeque non crescere posse infinitum ex solius additione finiti, quemadmodùm neque crescit linea ad unius puncti incrementum; & generaliter, quantitates, quarum differentia infinitè exigua est, semper à Geometris, & Analytis æquales censeri, ut præsertim videre est apud Thomam Cevam in eleganti Opusculo *de Parab. ad mod. ellips. consid.* & apud Hospitalium *de infinitè exiguis*. Quia tamen Philosophorum nonnulli id in dubium vocare ausi sunt, ex suis dumtaxat præjudiciis, crassoque loquendi, & æstimandi modo rem metientes, non gravabor id exacta demonstratione in hunc modum stabilire.

Ostensum est *hac propos.* infinitum spatium LCMAB æquari parallelogrammo MACD, ejusdemque semissi, & trienti, & quadranti, cæterisque partibus per singulos numeros denominatis; eodem autem ratiocinio constat, & spatium infinitum LCFB æquari parellelogrammo FBLC, cum ejus semisse, triente, quadrante, similibusque partibus deinceps assignabilibus; suntque integra parallelogram-

ma

ma MADC, FBLC *per* 12. 2. *Conic.* invicem æqualia, adeòque etiam utriusque semisses, trientes, quadrantes, & quotlibet similes partes perpetuò æquantur; ergo & ipsa infinita spatia prædicta, licèt finita magnitudine MABF differre invicem videantur, exactè æqualia nihilominus erunt. Quod fuerat demonstrandum.

SCHOLION.

IMò, nedum infinita magnitudines æquales censenda sunt, cùm finita quantitate semet excedunt, sed quandoque etiamsi excessu absolutè infinito se invicem superent, possunt nihilominus æquales manere, cùm scilicet integræ magnitudines, quæ comparantur, non fuerint in eodem genere Infinitatis cum sua differentia, sed in ordine altiori, ut patere potest ex aliàs dictis in Tract. de Infinit. Infinitor. prop. 3. Coroll. 2.

PROPOSITIO XVIII.

SPatia VQMA, AMFB, ordinatis proportionalibus VQ, AM, FB (sive continuis, sive discretis) interiecta, sunt invicem æqualia.

ETenim proportionales erunt pariter distantiæ à centro QC, MC, FC, adeòque eadem pars erit parallelogrammum VQM*K* ipsius VQCS, quę FEAM ipsius MADC, nec non eadem pars trianguli PKV ipsius VSC, quæ GEA ipsius ACD; sunt autem tùm integra parallelogramma, tum integra trian-

triangula VSC, ADC inter se æqualia *per* 12. 2. *Conic.* ergo & eorum portiones similes VQMK, & AEFM, necnon VKP, & AEG invicem sunt æquales: similiter ostenderetur, reliqua trilinea parabolica, quæ utrique segmento correſponderent, facta utrobique deſcriptione, quam *prop.* 14. fieri imperavimus, eſſe pariter invicem æqualia, quippe eadem pars integrorum ejuſdem nominis trilineorum, parallelogrammis VSCQ, ADCM inſcriptorum, quæ, non minùs ac ipſa parallelogramma, invicem æquantur; æqualis igitur ſemper erit infinita ſeries exprimens, juxtà *prop.* 14. *ejuſque corollaria*, valorem, ſeu quantitatem utriusvis ſegmenti hyperbolici VQMA, AMFB, quæ propterea hac etiam methodo æqualia oſtenduntur, non minùs quàm id geometricè factum fuerit, tum à Gregorio à S. Vinc. aliiſque, tum à nobis ipſis *in Hugenianis cap.* 6. *n.* 2. *&* *in Epiſt. Geom. Tract. de Infinit. lemm.* 3. *&* 4. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc facile fuerit datum quodvis Hyperbolicum ſpatium in data ratione ſecare, putà in ratione, quam habet *m* ad 1, ſumptis inter extremas ordinatas datum ſpatium claudentes tot mediis proportionalibus, quot exprimit $m - 1$; erit quippe ratio primæ ordinatarum ad primam mediarum aſſumptarum tam ſubmultiplicata rationis extremarum ordinatarum, quàm multiplex fuerit *m* unitatis, adeòque prima ordinatarum cum prima mediarum intercipient hyperbolicum ſpatium $= 1 : m$ totius propoſiti, ut oſtendimus *in Hugenianis cap.* 6. *n.* 3.

COROLL. II. Undè etiam conſtat, quomodo ſpatia eadem Hyperbolica ſint velut Logarithmi rationis ordinatarum, ſive diſtantiarum à centro, ut idem Gregorius à S. Vincentio primus animadvertit, & ex iis, quæ de Hyperbolæ ad Logiſticam, ſeu Logarithmicam relatione demonſtravimus *in Hugenian. cap.* 6. *n.* 4. *&* *cap.* 13. *n.* 8. colligi poteſt, necnon *loc. cit. de Infinit. lemm.* 6. oſtenſum eſt.

SCHOLION.

Hæc satis ad methodi, qua in hujus Quadratura demonstratione usus sum, illustrationem, & confirmationem allata arbitror. Nunc quia sub finem Capitis 13. Hugenianorum *aliam mechanicè expeditissimam Hyperbolæ Quadraturam ex simplici Tractoria deductam proposuisse me memini, quam & Leibnitzius à se dudum inventam testatus est in Epistolis ad me datis, de quibus supra* pag. 19, & 58, *illius veritatem hoc loco demonstrare non incongruum fuerit, imò ad Argumenti, quod præ manibus habemus, complementum ita pertinere putaverim, ut intersit plurimũ, ne cæteras inter hac de re speculationes hæc minimè contemnenda desideretur. Præmittenda sunt autem sequentia.*

PROPOSITIO XIX.

Esto Hyperbola A B, cujus centrum D, axis transversus M A, semiaxis secundus priori conjugatus DK, *positaque in axe primario ipsa D E æquali* DK, *per polum E, intervallo D A Conchois describatur Nicomedea A H, cujus regula D K, & ramus quilibet E C H regulam secet in C, unde primo axi parallela C B occurrat Hyperbolæ in B, ramo autem E H parallela ex centro D I occurat verticis tangenti A I in puncto I.*

Dico ipsam D I esse æqualem C B.

Ordinata enim B L, erit ejus, vel æqualis CD, quadratum ad rectangulum M L A ut rectum figuræ latus

tus ad transversum (*ex* 21. 1. *Conic.*) sive ut secundæ semidiametri D*K*, vel DE quadratum ad quadratum DA, ergo permutando, DC quadratum ad quadratum DE, ut rectangulum MLA ad quadratum DA, & componendo, quadratum EC ad quadratum ED, ut quadratum LD ad quadratum DA : sed, ob similitudinem triangulorum ECD, DIA, ita est etiam quadratum DI ad idem quadratum DA, ergo DL, aut CB æquatur DI. Quod erat demonstrandum &c.

PROPOSITIO XX.

Iisdem positis ordinetur in Conchoide HG regulę parallela, ipsam CB secans in P, & DI in F, jungaturque GB. Dico hanc fore tangentem Hyperbola in puncto B.

Radio DA circulus AN describatur, qui transibit omnino per punctum F, cùm sit, ob Conchoidem, CH æqualis DA, in parallelogrammo autem DCHF ipsi CH sit rursus æqualis DF; erit ergo ID ad DF (nempe LD *ex prop. præced.* ipsi æqualis ad DA) ut DA ad DG; quarè rectangulum LDG æquabitur quadrato DA, & *per Coroll. prop.* 37. 1. *Conic.* linea BG erit tangens. Quod erat demonstrandum &c.

COROLL. I. Hinc omnis ordinata hyperbolæ LB æqualis est portioni ordinatæ Conchoidis FH, inter Conchoidem ipsam AH, & arcum AF inscripti quadrantis interjectæ, modò hæc, producta ad axem in G, incidat in occursum tangentis BG cum eodem axe, quippe in parallelogrammo DCHF est HF æqualis DC, adeòque & ipsi BL.

COROLL. II. Puncta autem P, quibus eædem Conchoidis ordinatæ occurrunt axi parallelis BC, sunt ad curvam AP*p* Hyperbolæ correlatam, juxtà descriptionem da-

tam *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 2. cùm sit B P æqualis subtangenti L G.

PROPOSITIO XXI.

S*Tantibus præmissis: Dico, spatium Conchoidale F A H, arcu A F, curva A H, & ordinata portione F H circumscriptum, duplum esse trilinei Hyperbolici G B A, per tangentem G B, curvam A B, & axis segmentum A G determinati.*

CUm linea F H sit ubique æqualis B L, seu G P, erit spatium Conchoidale A F H æquale portioni Correlatæ G P A; sed, ex dictis *ad finem num.* 2. *Capitis* 8. *Hugenianiauorum*, portio illa correlatæ dupla est trilinei G B A, ergo & spatium A F H ejusdem trilinei est duplum. Quod erat demonstrandum &c.

PROPOSITIO XXII.

H*Yperbolam simplicis ope Tractoria quadrare.*

SIt Hyperbolæ portio V A B quadranda, vel quod eòdem redit, trilineum G V A B, duabus tangentibus, & hyperbolæ curva V A B comprehensum, sit in rectilineum spatium expeditè commutandū. Concipiantur omnia in horizontali plano jacere, & sumpto funiculo D A, pondere in extremo A apposito, quod subjectum planum premat, alterum extremum D secus axem secundum D R *d* trahatur, quo-

quousque funis D A transierit in *d a*, & pondus A trahentis directionem sequens fuerit perductum in *d*, secans lineam G Q secundo axi parallelam in ipso puncto *a*; tunc enim rectangulum ex semiaxe secundo D *K*, seu D E in G *a* æquabitur trilineo G V A B, quo propterea detracto ex triangulo V G B, innotescet Hyperbolicum spatium V A B.

Demonstratio. Funis D A, seu *d a* semper est tangens curvæ Tractoriæ A *a* descriptæ à pondere ejus directionem ubivis sequente, igitur tum radius quadrantis D F, tum ramus Conchoidis E H, erit ubique parallelus tangenti *a d* Tractoriæ (lineæ enim æquales, inter easdem parallelas ad easdem partes inclinatæ, sunt pariter parallelæ) itaque tum figuræ R D A *a* est correlatus quadrans D A F N, tum ipsi O E A *a* (ducta E O axi secundo parallela, extensisque *a* R, *a d*, quousque ipsam secent in O, T) correlatum est segmentum Conchoidale E A H; itaque, *per Cap.* 8. *n.* 3. *Hugenianorum*, erit portio O E A *a* æqualis segmento Conchoidali AGH,& portio RDA*a* equalis segméto circulari A G F; reliquum igitur rectangulum O E D R, quod sub E D æquali semiaxi secundo, & sub D R, vel G *a* continetur, æquabitur residuo trilineo A F H; sed hoc, *per præcedentem*, duplum est trilinei A G B, ideft æquatur trilineo V A B G; ergo & dictum rectangulum huic ipsi Trilineo Hyperbolico æquale erit. Quod fuerat demonstrandum.

COROLL. Hinc manifestum est, ipsas G *a* Tractoriæ axi parallelas proportionari trilineis Conchoidalibus A F H, & Hyperbolicis G A B sibi correspondentibus.

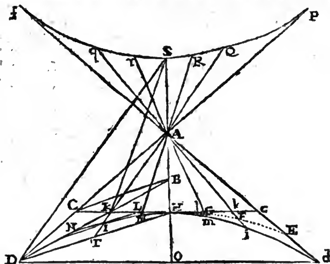
SCHOLION.

Obvium esset eandem methodum aliis Conchoidum generibus, ad aliarum Correlatarum figurarum dimensionem, extendere simili ratiocinio, sed cùm verear, ne ultra fines mihi constitutos

tutos hic Tractatus excurrat, id Lectoribus meis pro nunc exequendum relinquam: imò ex complurbus aliis, ad Circuli, & Hyperbolæ Tetragonismum spectantibus, duas dumtaxat propositiones, Auctaris loco, ad hyperbolam quadrandam conducentes subdere contentus ero, ob similitudinem, quam habent cum his, quæ in Scholio prop. 9. pag 41. *demonstravimus, ad circulum, per rationem ex infinitis compositam, dimetiendum pertinentia, ut affinitas Hyperbolæ cum Circulo, & Ellipsi melius innotescat.*

PROPOSITIO XXIII.

SIt hyperbolicus sector HIDA, cujus ad extrema puncta ductæ tangentes DB, HC conveniant in K: bifariam itaque secabitur connexa ex centro A per K recta AKIT, quæ per



verticem I portionis HID omninò transibit, ejusque subtensam HD bisecabit (ex 30. 2. Conic.) *Sector autem HMIA similis-*

militer bifariam secetur recta A L M, per concursum tangentium H L, I L transeunte, atque eodem modo reliquus sector H M A bifariam sectus intelligatur, & sic deinceps.

Dico (ducta ad diametrum A H ordinata D O) fore triangulum A D O ad propositum sectorem H I D A in ratione composita ex D A ad A C, & I A ad A K, & M A ad A L, atque ita ex aliarum semidiametrorum, residuos sectores bisecantium, rationibus ad interceptas inter centrum A, & tangentem H C; quæ rationes componentes utique post aliquot bisectiones fermè degenerant in rationem æqualitatis.

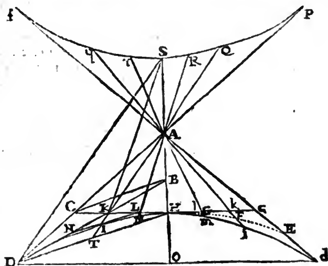
Nam A D O ad triangulum A D H est ut O A ad A H, vel D A ad A C; item [si rectæ lineæ subtendentes portiones H I, I D, nec non aliæ à terminis ad vertices portionum reliquarum connexæ supponantur) erit triangulum A D H ad quadrilineum A D I H, ut medietas ad medietatem, nempe ut H T A ad H I A triangulum [nam cùm D H à semidiametro A I sit bisecta in T, erunt invicem æqualia, tum ADT, ATH, tum DIT, TIH, adeoque, & reliqua triangula DIA, HIA] videlicet, ut T A ad A I, sive (*juxta* 37. 1. *Conic.*) ut I A ad A K; eodemque modo quadrilineum A D I H ad sextilineum comprehensum binis semidiametris A D, A H, & quatuor subtensis ad vertices portionum I D, I H, erit ut quarta pars unius ad quartam partem alterius, sive ut triangulum MHA ad LHA, nempe ut M A ad A L: & sic semper; ratio igitur trianguli A D O ad sectorem hyperbolicum H I D A, quæ componitur rationibus dicti trianguli A D O ad triangulum A D H, & hujus ad quadrilineum A D I H, & ipsius quadrilinei ad sextilineum prædictum, & sic deinceps ad alia multilatera per vertices reliquarum portionum adscripta, usquedum in ipsummet sectorem H I D A desinant, componetur rationibus D A ad A C; & I A ad A K, & M A ad A L, atque ita deinceps in infinitum. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Isdem positis, bisecentur singulę semidiametrorum portiones interceptę inter curvam hyperbolicam, & tangentem verticis H, nempe ipsa d c, i k, m l. *in punctis* E, F, G *(ad alteram figuræ partem sub minusculis litteris expressi, ad confusionem vitandam, sed ad eandem partem constructio concipienda est) ut fiat curva* E F G.

Dico Sectorem hyperbolicum H I D A *esse ad triangulum* A C H



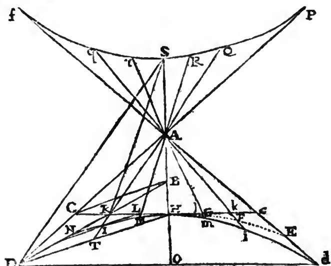
in ratione composita ex rationibus d A *ad* A E, i A *ad* A F, m A *ad* A G, *& sic deinceps ex aliarum semidiametrorũ bisecantium residuos sectores, ad interceptas inter centrum* A, *& dictam curvam* E F G: *quæ pariter rationes componentes brevi ad æqualitatem propemodum reducuntur.*

Pro-

PRoducantur semidiametri A H, A M, A I, A D ad oppositam hyperbolam S R Q P, & jungantur S D, S K, B C; eritque S D parallela A T bifariam secanti diametrū H S in A, & subtensam H D in T (2. *6. elem.*) quare triangulum S K A æquatur A D K, & addito communi A K B, vel A K H erit triangulum quidem S K B = triangulo A D B (vel A C H *ex Eutocio ad* 43. 1. *Conic.*) triangulum verò S K H = quadrilatero A D K H; est ergo A C H ad A D K H, ut S K B ad S K H, nempe ut S B ad S H, sive ut H A † A B ad 2 A H , vel quia B C est parallela H D [ob triangula B D C, B H C æqualia ex 1. 3. *Conic.*] ut D A † A C ad 2 A D, hoc est, ut C P ad P D, vel sumptis dimidiis (nam E A est media arithmetica inter *d* A, *c* A, adeoque ejus duplum = D A † A *c*) ut E A ad A *d*. Eodem modo quadrilaterum A D K H ad quintilaterum A D N L H, tangentibus H L, L I N, N D, & semidiametris A D, A H comprehensum, erit ut dimidium ad dimidium, scilicet triangulum A K H ad quadrilaterum A I L H; Nam ob basim H D bifariam sectam in T, A T D = A T H, & K D T = K H T, adeoque A K D = A K H = dimidio A D K H; eodemque jure A H L ostenderetur dimidium A I L H, & A I L (quod æquatur triangulo A I N, quia L I = I N, ut H T = T D) = dimidio A D N I, ideoque A H L † A I L, nempe A I L H = dimidio totius A D N L H; est autem A K H ad A I L H (eadem ratione qua supra) ut I A † A K ad 2 A I, sive ut Q K ad Q I, aut sumptis dimidiis ut F A ad A *i*, ergo in eadem ratione erit A D K H ad A D N L H; Quod si rursus comparetur A D N L H ad septilaterum, quod fieret ductis adhuc tangentibus per vertices portionum H I, I D, ostendetur pariter fore illud ad hoc, ut L R ad R M, sive ut G A ad A *m*; atque ita semper; Triangulum igitur A C H ad sectorem A D I H, cùm habeat rationem compositam ex dicto triangulo ad

K qua-

quadrilaterum ADKH, & ex hoc ad quintilaterú ADNLH, & ex hoc ad septilaterum supra designatum, atque ita porrò, usque ad ipsum sectorem, in quem hæc multilatera desinunt, rationem habebit compositam ex A E ad A *d*, & A F ad A *ι*, & A G ad A *m* &c. & convertendo constat propositum.



COROLL. I. Patet, sectorem hyperbolicum A D I *H* ad triangulum A C *H* habere etiam rationem compositam ex D P ad P C, & I Q ad Q K, & M R ad R L, aliorumque diametrorum, continuè bisecantium reliquos sectores, ad interceptas inter tangentem *H* C, & oppositam hyperbolam S R Q P: hoc enim in decursu demonstrationis ostensum fuit.

COROLL. II. Quia triangulum A D O ad sectorem hyperbolicum A D I *H* est, *ex prop.* 23. in composita ratione D A ad A C, & I A ad A K, & M A ad A L, &c. idem

verò

verò sector hyperbolicus ad triangulum ACH est, *ex hac prop.* in ratione composita ex *d*A ad AE, & *i*A ad AF, & *m*A ad AG &c. fit ex æquali ratio triangulorum ADO, ACH [hoc est duplicata OA ad AH] composita ex rationibus *d*A ad A*c*, & *d*A ad AE, nec non *i*A ad Ak, & *i*A ad AF; itemque ex *m*A ad A*l*, & *m*A ad AG; hoc est rationibus quadrati *d*A ad rectangulum *c*AE, & quadrati *i*A ad rectangulum kAF, & quadrati *m*A ad rectangulum *l*AG &c.

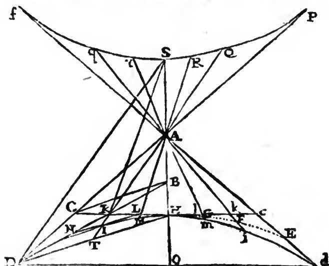
SCHOLION I.

N*Otari potest, curvam EFG, quæ bisecat segmenta* dc, ik, ml *ex semidiametris intercepta inter tangentem, & curvam hyperbolicam, esse unam ex Conchoidibus hyperbolicis, de quibus agit P. Nicolas Soc. Jesu in elegantissimo Tractatu de Conchoidibus, & Cissoidibus* exercit. 1. parte 4. *quemadmodum similis curva EFG in figura superiùs adducta* pag. 41. *de dimensione Circuli, quæque bisecat similes interceptas ex semidiametris inter tangentem, & peripheriam circuli (ut ostensum est* pag. 43 *) est pariter Conchois circularis à Nicomede proposita; Unde liquet analogia inter præsentem Hyperbola, & illum Circuli tetragonismum, de quo loco citato agebamus.*

SCHOLION II.

S*I ad axem HC ordinarentur tales applicatæ, quæ ad abscissas à puncto H forent in ratione sectoris ADIH ad sectorem abscissum per semidiametrum in eodem puncto cum applicata secantem ipsam HC (quomodo applicata in C esset = CH, & applicata in K = dupla HK, applicata verò in L = quadrupla HL atque ita semper, prout sector ADIH = AHID, sed idem = 2 AHMI, necnon = 4 AHM &c.) tunc foret HC ad ultimam applicatam in puncto H, ut triangulum ACH ad*

sectorem hyperbolicum ADIH: esset enim ACH ad AHC, ut CH ad sibi aqualem applicatam in C; idemque ACH esset ad quadrilaterum ADKH (duplum trianguli AHK ex ostensis



in hac prop.) *ut CH ad applicatam in K duplam KH; pariterque ACH foret ad multilaterum ADNLH quadruplum [ut supra vidimus] trianguli AHL, ut ipsa CH ad applicatam in L, qua foret quadrupla LH; & sic semper continuata constructione; unde ACH ad sectorem hyperbolicum, in quem illa multilatera desinunt, foret ut HC ad applicatam in H, quam ex diametro HA resecaret curva nuper descripta. Idem etiam valet in circulari sectore, facta similis curva constructione ad puncta ejus tangentis: & hic quidem contingeret, dictam resectam à curva sic constructa, in puncto H ordinatam, aquari ipsimet arcui circulari HD, in hyperbola verò aquaretur differentia data cujusdam recta linea, & arcus parabolica curva. Atque hic esto nostra* De Quadratura Circuli, & Hyperbolæ *Dissertationis*

FINIS.

AP-



APPENDIX I.

De methodo, Curvas innumeras, præsertim Parabolas, & Hyperbolas dimetiendi, & rectificandi, necnon Generali earundem expressione analytica per Seriem Infinitam.

AMicorum votis morem gerens hanc etiam qualemcumque Meditatiunculam adiungo, licèt ab Argumento hujus Libri tantisper alienam, nisi in speculationum similitudine, ac demonstrandi modo præcedentibus affini, connexionem nonnullam inquiras; Etsi autem quæ nunc dicenda erunt pridem indicaveram *in Epist. Geom. ad P. Thomam Cevam Hugenianis adnexa num.* 17. occasione rectificationis Cycloidis, quam hac ipsa methodo exhibui, innuique id generatim circa innumeras alias curvas institui posse, visum tamen fuit specialiùs doctrinam illam applicare, & ad omnes Parabolas hìc extendere, ut faciliùs deinceps, tum hanc, tum alias passim in nostris operibus occurrentes methodos promovere, ac particularibus exemplis illustrare Tyrones addiscant, ad Scientiæ hujus omnium Nobilissimæ, Jucundissimæque incrementum.

PRO-

PROPOSITIO UNICA.

Sit curva qualibet A D B, *rectis* I C A, 8 B Z *ad basim* C B *perpendicularibus intercepta, & ex quibuslibet ejus punctis* D, d *actis* D E H, d e h *basi pariter normalibus, nec non tangentibus* F D G, f d g *inter extremas perpendiculares terminatis; ponatur ubilibet* E H *æqualis* F G, e h *æqualis* f g, *quousque per puncta* H, h *sic determinata transeat curva* I H h.

Dico, spatium curva I H h, *rectisque* I C, C B, B 8 *comprehensum æquari rectangulo basis* C B *in curvam* A D B: *item, portionem quamlibet* I H E C *æquari rectangulo ex eadem* C B *in correspondentem arcum* A D.

INtelligatur curvæ portio D *d* indefinitè parva, ut cum tangentis suæ portiuncula D *d* coincidere censeri possit, certè ut ab æqualitate propiùs absint, quam pro qualibet assignabili differentia, & una pro altera indiscriminatim usurpari queat *ex coroll. 4. prop. 5. De Infinit* itaque, ob parallelas proportionaliter secantes interceptas F G, C B, erit illa ad hanc, ut D *d* ad E *e*, rectangulum igitur extremarum H E *e* æquabitur rectangulo mediarum C B in D *d*; Quod cùm ubilibet contingat, manifestum est, omnia rectangula, quæ per indefinitam sectionem basis C B adscribi possunt spatio h H I C B 8 (cujusmodi unum est h *e* E 2)

h e E z) quæque ab ipso differre possunt minori differentia qualibet data, prout puncta D, *d*, seu E, *e* in infinitùm proximiora accepta fuerint, æqualia esse rectangulo basis CB in omnes curvæ portiunculas D*d*, atque adeò spatium, curva IH*b*, rectisque &c. ut proposuimus.

COROLL. I. Si punctum A fuerit vertex curvæ, & AZ ejus tangens parallela, adeòque æqualis basi CB, utique & CI æquabitur CB, eritque ICB4 quadratum, quod ad spatium hHICB8 erit, ut basis BC ad curvam ADB, rectangulumque ICER ad spatium correspondens HICE erit, ut CE, vel ordinata MD, ad arcum AD. Aliàs describatur quadratum ipsius CB, quod sit CB4I, & eadem sequentur.

COROLL. II. Quoniam quadratum FG ad quadratum CB (vel HE, seu NC quadratum ad quadratum ER vel CI) est ut quadratum FD ad quadratum DM, erit dividendo (posita *a*C æquali CI) rectangulum *a*NI ad quadratum CI [seu differentia quadratorum HE, RE ad RE quadratum] ut quadratum subtangentis FM ad quadratū ordinatæ MD, quod, ut mox patebit, ad naturam curvæ IHh in sequentibus expeditè determinandam aptissimè conducere potest.

COROLL. III. Speciatim igitur si ADB fuerit Circuli quadrans, erit spatium hHICB8 duplum ipsius, & portio quævis IHEC dupla sectoris correspondentis CDA, rectangula enim ex radio BC in curvam ADB, vel ejus arcum AD, quæ spatiis hHICB8, & IHEC respectivè æquantur, dupla sunt ex Archimede, vel *ex Coroll. 1. nostra Prop. 36. in Vivianea Problemata* totius quadrantis, aut sectoris correspondentis.

COROLL. IV. In hac eadem hypothesi patet, ordinatam E*H* æquari interceptæ à centro, & tangente axis portioni CF, cùm sit enim FG ad CB, ut FD ad DM, seu ut FC ad CD, ob æqualitatem consequentium CB, CD,

æqua-

æqualia erunt & antecedentia FG, FC, ipsi autem FG æqualis est per constructionem EH. Quare &c.

COROLL. V. Notari etiam potest, spatium hHICB8 tunc provenire idem cum spatio figuræ quadranti correlatæ, de quo *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 6. loquti sumus, nec ab illo differre, nisi varia linearum axi parallelarum applicatione, ibi scilicet à singulis peripheriæ punctis pendentium, hic directè ad correspondentia basis puncta depressarum, nam & rectæ *ao* (*in figura loco cit. exhibita*) æquantur distantiis centri ab occursu tangentis cum axe, ut hic ostensæ sunt EH æquales FC.

COROLL. VI. Spatium IHN duplum est correspondentis Trilinei FDA, nam & rectangulum CEHN duplum est trianguli FDC parem basim intra easdem parallelas habentis, & spatium IHEC duplum est, *per coroll.* 3, sectoris ADC, unde & residuum IHN reliqui FDA pariter duplum erit.

COROLL. VII. Imò quæcunque esset curva ADB, si juxta *Coroll.* 4. alia curva IH*b* ita illi responderet, ut semper ordinata EH esset æqualis FC distantiæ puncti fixi C ab occursu tangentis cum axe, tum Corollarium III. tum VI. locum haberent, nam ductis ex indefinitè proximo puncto *d* tangente *df*, & parallela ordinatæ *deb*, quoniam Ff differentia ipsarum FC interceptarum inter punctum fixum C, & occursum tangentis, semper æqualis erit H 2, vel

vel Nn differentiæ ordinatarum EH ipsis CF æqualium, rectangulum nNH 2 duplum erit trianguli æquè alti FfD; quod cùm ubique eveniat, palam est, spatium IHN duplum fore spatii FDA, sed & duplum rectangulum CEHN trianguli æqualem basim in eadem altitudine obtinentis CDF; itaque & spatium IHEC duplum erit spatii ADC.

COROLL. VIII. At si curva ADB (positis iis quæ in propositione) fuerit Parabola quadratica, erit IHb Hyperbola ordinaria, cujus transversum latus aI, rectum verò tertia proportionalis post aI, & parametrum ejusdem parabolæ; nam quia semper FM est dupla AM, atque ut AM ad MD, ita hæc ad parametrum, duplicando rationes, sumptoque multiplici primi antecedentis, & æquè submultiplici secundi consequentis, erit FMq. ad MDq. (idest *per Coroll.* 2. rectangulum aNI ad quadratum IC) ut quadratum MD, vel NH ad quadratum semiparametri, & permutando, rectangulum aNI ad quadratum NH, ut quadratum IC ad quadratum semiparametri, sive ut aI ad tertiam proportionalem post aI, & parametrum, quæ est nota proprietas Hyperbolæ prædictis lateribus descriptæ *per* 21. 1. *Conicorum*.

COROLL. IX. Quòd si supponatur esse ADB parabola cubica, erit curva IHb Hyperboloides, cujus ordinatarum quartæ potestates, seu biquadrata, proportionentur rectangulis aNI, nam tunc FM est tripla AM, atque ut hæc ad MD, ita quadratum MD ad quadratum parametri, adeòque AM quadratum ad quadratum MD, ut biquadratum MD ad biquadratum parametri, & FMq. ad MDq. (seu aNI ad ICq.) ut biquadratum MD vel NH ad nonam partem biquadrati parametri; similiter, & convertendo, ostendetur ICq. ad anI, ut nona pars biquadrati parametri ad biquadratum nh; ex æquo igitur rectangula aNI, anI proportionantur NH, hn biquadratis.

COROLL. X. Eodem ratiocinio ostendetur, curvas IHh

L sem-

semper esse Hyperboloides aliorum graduum, quoties ADB sit aliqua ex aliis infinitis parabolis, cujus ordinatarum potestates à quolibet exponente m denominatæ proportionentur abscissarum potestatibus ab alio quolibet exponente n indicatis, erit enim semper A M ad M D, ut potestas $[m - n] : n$ ipsius M D ad similem parametri potestatem, adeòque A M quadratum ad quadratum M D, ut potestas $(2m - 2n) : n$ ipsius M D ad similem potestatem parametri; cùmque F M sit semper $m : n$ ipsius M A, erit F M quadratum ad quadratum M D (nempe rectangulum a N I ad quadratum I C) ut potestas $(2m - 2n) : n$ ipsius M D, vel N H, ad $nn : mm$ similis potestatis parametri, adeòque ordinatarum N H potestates $(2m - 2n) : n$ ipsis rectangulis a N I proportionales simili ratione demonstrabuntur; quod est, curvam I H h esse aliquam ex infinitis Hyperboloidibus ad diametrum I C comparatis.

COROLL. XI. Notatu dignum est, Hyperboloides ejusmodi spatium absolutè quadrabile aliquando comprehendere, & tum Curvas Parabolicas iis respondentes esse absolutè rectificabiles; certè in parabola cubica secundi ordinis, ubi m valet 3, n valet 2, unde $(2m - 2n) : n$ valet $[6 - 4] : 2$, idest æquivalet unitati, rectangula a N I, seu differentiæ quadratorum HE, R E, erunt in ratione simplicium linearum NH, seu I R, ideòque curva I hH (concavitate versùs C B obversa) erit portio quædam Para-

bolæ

bolæ quadraticæ, per ordinatam IC à vertice obtruncatæ, ex notissima hujus parabolæ natura.

COROLL. XII. Pariter ubi ordinatarum Parabolæ ADB quintæ potestates correspponderent biquadratis, seu quartis potestatibus abscissarum, valor exponentis ordinatæ ad *Hyperboloidem* N*H* esset [10 − 8]: 4, idest 1 : 2; quod indicat, rectangula *a*NI fore in subduplicata ratione ordinatarum NH. Atque hoc genus *Hyperbolæ* jam ad mensuram vocavit illustris Geometra Stephanus De Angelis altera parte sui De Infinitis Spiralibus Inversis, Infinitisque *Hyperbolis* Libelli *Schol.* 3. *Propositionis* 3. ostendens rectangulum NIR*H* esse ad spatium IHN, ut quadratum NA ad 1 : 5 quadrati NI, cum 1 : 3 quadrati *n*I, & cum rectangulo CIN [quod consonat dimensioni mox ex aliis principiis afferendæ *Schol.* 1. *exempl.* 2.] quare & ejusmodi parabola rectificationem admittet.

COROLL. XIII. Imò generatim enunciari potest, quoties dupla differentia exponentium *m*, *n* metitur ipsum *n*, verbi causa per numerum *p*, semper curvam parabolicam ADB rectificari posse; erit enim $(2m - 2n) : n = 1 : p$ adeòque rectangula *a*NI in ratione erunt tam submultiplicata ordinatarum NH, quàm submultiplex $1 : p$ unitatis, ipsæque ordinatæ proportionales erunt rectangulorum illorum potestatibus ab exponente *p* indicatis, unde singula membra potestatis ejusmodi rectangulorum ducta in axem curvæ NI, & divisa per numerum dimensionum ejusdem NI singulis membris prædictis competentem, exhibebunt notam quantitatem rectis dumtaxat lineis definitam, quæ ad spatium I*H*N datam prorsus rationem habebit; Id quod semper contingere patet, quùm *m* est numerus impar, & *n* par proximè minor, ut in duobus præcedentibus Corollariis; nam tunc $m = n + 1$, adeoque $[2m - 2n] : n = (2n + 2 - 2n) : n = 2 : n$, & si *n* numerus par $= 2p$, fit $2 : n = 1 : p$, ut supra diximus.

SCHOLION I.

RES clarior fiet exemplis analyticè expositis in hunc modum. Sit IC $= a$, IN $= x$, NH $= y$; quoniam ergo $2ax \dagger xx$ proportionatur $y^{1:p}$, sumi poterit velut ipsi æqualis (sic nempe hic multiplicari, aut dividi intelligatur per constantem aliquam quantitatem unitatis loco sumtam, ut dimensiones suppleat) unde & æquè elevando utrumque terminum, erit $(2ax \dagger xx)^p = y$, spatiique IHN elementum $ydx = [2ax \dagger xx]^p dx$, quæ est quantitas facilè integrabilis, ductis singulis membris (loco differentialis dx) in x, ac per exponentem ipsius x unoquoque diviso.

Exemplum I. In casu corollarii 11. $p = 1$, itaque $ydx = 2axdx \dagger xxdx$, cujus integrale $axx \dagger x^3 : 3$ æquabit valorem spatii IHN.

Exemplum II. In casu corollarii 12. $p = 2$, itaque $ydx = 4aaxxdx \dagger 4ax^3dx \dagger x^4dx$, cujus integrale est $4aax^3 : 3 \dagger ax^4 \dagger x^5 : 5 =$ spatio IHN.

Exemplum III. Si exponentes parabolæ sint, $m = 7$, $n = 6$, erit $(2m - 2n) : n = 1 : 3$, unde $p = 3$; itaque $ydx = 6a^3x^3dx \dagger 12aax^4dx \dagger 6ax^5dx \dagger x^6dx$, cujus integrale $= 3a^3x^4 : 2; \dagger 12aax^5 : 5; \dagger ax^6; \dagger x^7 : 7 =$ spatio IHN.

Et sic in aliis pari progressu.

SCHO-

SCHOLION II.

EOdem ratiocinio infinitarum Hyperbolarum inter asymptotos positarum dimensionem reduces ad infinitas Hyperboloides iis, quas supra consideravimus, reciprocas, nempe quarum ordinatarum NH, nh potestates quælibet respondeant reciprocè rectangulis anI, aNI, quibus manifestum est asymptotos futuras rectas I4, IN, observabisque exponentem potestatum in ordinatis ad has Hyperboloides prædictis rectangulis reciprocarum esse fractionem $[2m + 2n]:n$, in qua scilicet duplum aggregatum exponentium coordinatarum ad asymptotos hyperbolæ datę denominatur per exponentem distantiæ ordinatæ à centro, ut simili calculo repetito constare posset, nisi jam pigeret antiqua vestigia iterum premere, nulla spe id Hyperboloidum genus aliquod saltem quadrandi nunc prælucente, ac laboris asperitatem alleviante.

SCHOLION III.

ITaque consultius erit ad seriem infinitam Curvæ longitudinem revocare, eritque Curva quælibet [cujus axis $= x$, ordinata $= y$, subtangens $= t$] æqualis integrali hujus seriei $dx; + ydy:2t; - y^3 dy:8t^3; + 3y^5 dy:48t^5$ &c. continuandæ *ut in Hugenianis pag.* 127. quæ quidem, determinata relatione curvæ naturam exprimente, sive ipsius t valore in terminis ab ipso y integrè affectis, integrari poterit. Exemplo sit Logarithmica, cujus subtangens eadem semper constans linea est, quæ pro unitate usurpata dabit integratam seriem $= x; + yy:4; - y^4:32; + y^6:96$ &c. $=$ longitudini Curvæ ipsis x & y correspondentis.

Quòd si infinitarum parabolarum parameter sit $= 1$, aut ℞ quadrati spatio asymptotico in quavis ex infinitis hyper-

perbolis inſcripti ſimiliter $= 1$, æquatione curvæ naturam exprimente $y^m = x$ [ubi per m quemlibet numerum ſignifico, poſitivum, aut negativum, integrum, fractumve, ut libuerit] ſubtangens erit perpetuò $= my^m$; itaque Parabolicæ, aut Hyperbolicæ cujuslibet Curvæ longitudo, ſive integrale primæ ſeriei evadet $= x; - 1 : [m - 2], 2my^{m-2}]; + 1 : (3m - 4), 8m^3 y^{3m-4}); - 3 : (5m - 6), 48 m^5 y^{5m-6}]$ &c.

Vel etiam eadem infinitarum parabolarum, & hyperbolarum longitudo, ut dudum præſtitimus, reducetur commodè ad ſequentem ſeriem, ſcilicet $y;$

$$+ m^2 y^{2m-1} : [2, (2m - 1);$$
$$- m^4 y^{4m-3} : (2 . 4, (4m - 3);$$
$$+ 3 m^6 y^{6m-5} : (2 . 4 . 6, (6m - 5);$$
$$- 3 . 5 m^8 y^{8m-7} : (2 . 4 . 6 . 8, (8m - 7);$$
$$+ 3 . 5 . 7 m^{10} y^{10m-9} : [2 . 4 . 6 . 8 . 10, (10m - 9)$$

&c. ; itaut in Apolloniana Parabola, ubi $m = 2$, Curva ſit æqualis $y; + 2y^3 : 3; - 2y^5 : 5; + 4y^7 : 7; - 10y^9 : 9; + 28y^{11} : 11$ &c. unde progrediendo quantumvis accuratam Curvæ longitudinem determinare licebit, acceptis rectarũ proportionalium y, y^3, y^5, y^7 &c. partibus ſupra expreſſis per ſubſtitutionem valoris ipſius m ex generali ſerie deductis.

Quod quidem Theorema cùm ſuperiori anno Egregio Juveni Gabrieli Manfredio ex more communicaſſem, Is & ad editionem me perhumaniter eſt cohortatus, & eleganti demonſtratione dignatus eſt confirmare, doctiſſimaque animadverſione, imò & nobiliorum Veritatum acceſſione illuſtrare: cujus Epiſtolæ fragmentum ad fidem iis, quæ dixi, conciliandam producere non verebor, ſingularem ejus mentis profunditatem, & in res meas humanitatem altero hoc ſpecimine teſtaturus, quamquam utriuſque veſtigiis aliquot, ne illi, mihique crearent invidiam, conſultò reſectis; nec enim deſunt qui laudes alienas in proprii contemptus argumentum convertant.

EX

EX ALTERA EPISTOLA

V. CL. GABRIELIS MANFREDII

Ad Auctorem scripta Bonon. 8. Augusti 1702.

. . . . Transeo nunc ad subtilissimum illud Theorema tuum, quod mihi summo honore communicare dignatus fuisti. Ego syncerè fateor, & seriò hoc tibi maxima cum lætitia profiteor, quòd ex melioribus, & maximè utilibus totius Geometriæ adhuc inventis sit censendum . . . Sanè Veritate ejus comperta, & Utilitate, quæ multa est, optimè perspecta, Tibi Vir Carissime, & Doctissime, omni officiorum debito devinctum me agnosco, quòd me præ cæteris hoc distinctionis gradu digneris, quo aliquid mihi gloriosius contingere posse non credam, ut siquidem Theorematis hujus Nobilissimi, cùm Laudes in omnium ore audivero (quod tunc accidet, cùm Publico illud impertitus fueris, ut autem, citò citiùs impertiaris enixè supplico) illos me præcessisse, & ejus Pondus ante cæteros agnovisse possim gloriari.

Tali autem ratiocinio Tuum hoc Inventum confirmo. . . Esto æquatio $y^m = x$, *undè* $my^{m-1}dy = dx$, *& curvæ elementum* $dy\sqrt{[1 + mmy^{2m-2}]}$ *est porrò* $\sqrt{[1 + mmy^{2m-2}]} = 1; + mmy^{2m-2} : 2; - m^4 y^{4m-4} : (2.4); + 3 m^6 y^{6m-6} : (2.4.6); - 3.5 m^{8m-8} : (2.4.6.8); + 3.5.7 m^{10} y^{10m-10} : (2.4.6.8.10)$ *&c.* [*Sic Newtonus radices extrahit*] *quare ipsius Curvæ elementū erit series* $dy; + mmy^{2m-2}dy : 2; - m^4 y^{4m-4}dy : (2.4.); + 3 m^6 y^{6m-6} dy : [2.4.6]; - 3.5 m^8 y^{8m-8} dy (2:4.6.8); + 3.5.7 m^{10} y^{10m-10} dy : (2.4.6.8.10)$ *&c. cujus integrale, nempe ipsa curvæ* $y^m = x$ *longitudo, erit* $y; + mmy^{2m-1} : (2,(2m-1); - m^4 y^{4m-3} : [2.4,]4m-3]; + 3m^6 y^{6m-5} : (2.4.6,(6m-5]; - 3.5m^{8m-7} : [2.4.6.8,[8m-7); + 3.5.7m^{10} y^{10m-9} : [2.4.6.8.10,(10m-9)$ &c.

Unde patet, ad hoc ut tua Analysis valeat, debere tantùm

quan-

quantitates mmy^{2m-2}, *aut alias, quas earum loco debeas ex curvæ natura substituere, tales esse, ut omnes earum potestates in* dy *ducta sint integrabiles. Debent igitur curvæ, in quibus utilis esse potest tua series, ferè esse ex iis, in quibus indeterminatarum alterutra* x *sola unam æquationis partem constituere potest, reliqua æquationis parte ex quotvis terminis interim composita, in quorum singulis altera indeterminata ad quamvis potestatem elevata inveniatur, nullo insuper radicali signo, quod indeterminata ingrediatur, partem illam æquationis implicante, nec ullo insuper denominatore, quem indeterminata eadem ingrediatur, eandem æquationis partem afficiente; Talis esset curva, cujus æquatio foret*

$$x = (by^m \dagger cy^n \dagger y^p \dagger ay^q \ \&c.) : f$$

exponentibus m, n, p *&c. denotantibus quosvis numeros positivos, vel negativos, integros, vel fractos, rationales, vel surdos &c. Quales quidem curvas omnes quadrabilia spatia continere repereram. Si enim curvæ alicujus æquatio talis sit, qualem modò exposui,* $x = (by^m \dagger cy^n \ \&c.) : f$, *hic valor indeterminatæ* x *erit tantùm per progressionem arithmeticam dividendus, cujus progressionis termini sint respectivè* m, n, p, q *&c. singuli unitate aucti, & talis ritè institutæ divisionis quotiens erit per* y *multiplicandus, eritque productum spatium, quod axe [axe siquidem super quo ipsæ* y *assumuntur] curva, & ipsæ* x *continetur &c.*

Haud difficiliùs etiam invenies, omnes tales curvas, quæ quadrabilia spatia continere conclusimus, si super axem rotentur, super quo ipsæ x *assumuntur, solida efficere faciliter ad cylindros ejusdem basis, & altitudinis reducibilia, &c.*

Hactenus Vir Doctiss. cujus elegans generalium quadraturarum Theorema sic vicissim libet analyticè ostendere. Quoniam $x = (by^m \dagger cy^n \dagger y^p \dagger ay^q$ &c. $) : f$, erit $x\,dy$, elementum scilicet spatii, quod Acutissimus Juvenis considerat, $=$ $(by^m\,dy \dagger cy^n\,dy \dagger y^p\,dy$ &c. $) : f$, cujus integrale, nempe ipsum spatium prædictum $= by^{m\dagger 1} : (mf \dagger f) ; \dagger cy^{n\dagger 1} : (nf \dagger f) ; \dagger y^{p\dagger 1} : (pf \dagger f) ; \dagger ay^{q\dagger 1} : (qf \dagger f)$ &c. ut ipse pronunciavit,

vit, ejuſque complementum æquabitur eidem ſeriei, ſingulis priùs terminis per ſuos exponentes m, n, p &c. ductis, nam elementum tunc eſt ydx, at differentiando primam æquationem curvæ conſtitutivam prodit $dx = [mby^{m-1}dy + ncy^{n-1}dy + py^{p-1}dy$ &c.$] : f$; quare $ydx = [mby^m dy + ncy^n dy + py^p dy$ &c.$] : f$; ejuſque integrale $= mby^{m+1} : (mf+f)$; $+ ncy^{n+1} : (nf+f)$; $+ py^{p+1} : (pf+f)$ &c.

Quod attinet ad ſolida ab his ſpatiis, qua parte ad axem x ſpectant, revolutis progenita, animadvertendum eſt, rationem ſolidi ex cujuſvis figuræ rotatione reſultantis ad cylindrum ejuſdem baſis, & altitudinis, eandem eſſe cum ratione ſummæ ex omnibus quadratis ordinatarum figuræ genitricis ad ſummam ex totidem quadratis linearum ultimæ baſi æqualium, ut methodo indiviſibilium docemur; porrò ſumma ex omnium ordinatarum y quadratis reſpectu axis x eſt $\int yydx$, ſive, pro dx ſubſtituto ejus valore ſupra invento, integrale fractionis $[mby^{m+1}dy + ncy^{n+1}dy$ &c.$] : f$; hoc eſt ſeries $mby^{m+2} : [mf+2f]$; $+ ncy^{n+2} : [nf+2f]$ &c. ſumma verò ex totidem quadratis ipſi yy æqualibus eſt yyx, ſive $[by^{m+2} + cy^{n+2}$ &c.$] : f$; adeòque ad cylindros ejuſdem baſis, & altitudinis facilè reducentur hæc ſolida.

Hinc ex hac ratione ſolidorum auferendo rationem, ſupra expoſitam, ſpatii curvilinei ſolidum generantis ad rectangulum yx, quo cylindrus producitur, prodit ratio diſtantiæ ab axe centri gravitatis ejuſdem ſpatii curvilinei ad ſemiſſem ordinatæ y, per quam diſtat centrum gravitatis dicti rectanguli ab eodem axe.

Subtangens cujuslibet ex talibus curvis, in axe x determinata, ſemper erit $= (mby^m + ncy^n$ &c.$) : f$, ut conſtat ſubſtituto valore ipſius dx in generali ſubtangentis expreſſione $ydx : dy$; ſubnormalis verò in eodem axe accepta $= f : (mby^{m-2} + ncy^{n-2}$ &c.$)$ quippequæ cum ſubtangente contineat rectangulum $= yy$: eademque methodo infi-

nitæ aliæ quæstiones, ejusmodi curvarum genus concernentes, facillimam determinationem suscipiunt, imò crepundia sunt hæc nobilissimæ recentiorum analysis, cujus præstantiam vel ex hoc uno specimine satis intelligere possumus, ejusq. (immensè quantũ!) protensam utilitatem admirari; Nam de Infinitis Parabolis quot libros ab Acutissimis Geometris exaratos habemus? Jam illæ satis minimam, & infinitè exiguam hujus generis curvarum speciem constituunt, quatenus in parabolis dumtaxat uno membro æquatio expeditur, ejus etiam coefficiente $b:f$, utpotè superfluo, retracto, cæterisque terminis evanescentibus, ob coefficientes $= o$, nam per $x = y^m$ satis omnes parabolæ comprehenduntur, eritque ex hac generali doctrina spatium curvilineum circa axem $y = y^{m+1}:[m+1]$; complementum verò $my^{m+1}:(m+1)$, & hoc ad illud, ut m ad 1. Solidum ex rotatione circa axem x ad cylindrum ejusdem basis, & altitudinis erit, ut $m:(m+2)$ ad 1. Distantia ab axe centri gravitatis spatii hoc solidum rotundum describentis, ad semissem ultimæ ordinatæ y, ut $m:(m+2)$ ad $m:[m+1]$, sive, ut $m+1$ ad $m+2$, & sic de aliis; Quomodo autem pro Parabolis omnibus, ita & pro Curvis magis compositis, & duos, aut tres, quatuor, pluresve terminos importantibus ab ipsa y affectos, aliisque notis quantitatibus utcunque implicatos, elici possunt expressiones dictarum dimensionum ex una hac Clariss Juvenis animadversione, quippe eo fine terminorum numerus in altera æquationis parte indeterminatus relinquitur, ut quot quis voluerit opportunè respondeant, ibique sistere, aut ultrà promoveri, ubi, & quòusque opus fuerit, valeamus; nec enim hæ series infinitæ semper sunt (quamquàm & tales esse nil vetat) sed plerumque semet determinant, pro varia curvarum natura, ut dictum est, absolutamque spatiorum, & solidorum dimensionem renunciant finitis terminis explicabilem.

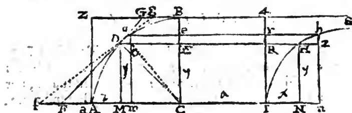
SCHO-

SCHOLION IV.

DEnique monendus es, Mi Lector, quidquid in Propositione hac, & Corollariis eidem adnexis, illatum est circa rectificationem curvarum redactam ad spatii, per tangentium FG ordinationem provenientis, dimensionem,

potuisse aliis modis obtineri, exempli causa ponendo ipsas EH æquales portionibus rectarum ad curvam in D normalium, per duas AZ, CB parallelas interceptis, nam & spatium hinc proveniens 8BCIHh equaretur rectangulo ipsius CA in curvam ADB, & portio quævis HICE rectangulo ejusdem AC in correspondentem arcum AD, nec differt demonstratio ab ea, quam dedimus in Propositione.

Aut generaliùs, si fiat constans quælibet linea, putà C*a*, ad EH, ut ordinata MD ad tangentem DF, vel ut subnormalis MC ad normalem CD, vel in alia æquivalenti ratione functionum curvæ ad punctum D spectantium, spatium hinc proveniens erit semper æquale rectangulo illius assumptæ constantis C*a* in curvam ADB, & portiones ejus æquales rectangulis ejusdem constantis in arcum sibi competentem; nec enim alia ratione jussimus in præcedentibus assumi EH æqualē tangentium, vel normalium partibus, inter parallelas AC, BZ, aut CB, AZ interceptis, nisi ut costans linea CB, vel CA esset ad EH in dicta



dicta ratione, ideſt ut elementum ordinatæ *d*O, vel *e*E, ad elementum curvæ D*d*, unde æqualitas rectangulorum infinitè parvorum proveniebat, redigens curvæ rectificationem ad menſuram ſpatii ex ordinatis E H provenientis.

PARERGON.

Hinc viciſſim patet, propoſito ſpatio quodam C E H I, poſſe determinari curvam A D d, *cujus ope illud quadrari poſſit, etiamſi aliàs geometricæ quadraturæ ſit incapax; ut enim hoc ſuccedat (factis C I* = a, *I N* = x, *unde E H* = a † x, *C E, vel M D* = y, *& A M* = z) *oportet ſemper elementum dati ſpatii* a d y † x d y *æquari elemento curvæ in conſtantem quantitatem ducto, nempe* = a √(d z² † d y²); *ergo dividendo per* a, *fiet* dy † xdy : a = √(dz² † dy²), *& utrinque quadrando, erit* dy² † 2xdy² : a † xxdy² : aa = dz² † dy²; *ablato communi* dy² *remanet* (2 a x † xx) dy² : aa = dz², *ac demum* √(2 a x † x x) dy : a = dz; *unde ſumma ſpatiorum, ex* √(2 a x † xx) *applicatis ad* y *æquatur rectangulo conſtantis* a *in quæſitam* z; *Quare prodit talis conſtructio: differentia quadratorum ordinatæ E H in dato ſpatio, & conſtantis E R, ſit* uu, *& applicatis ipſis* u *in E, ſpatium inde proveniens dividatur per* a, *quotiens erit* z, *ſive A M quæſita, cui ordinando M D* = *datę* y, *reſultat curva A D, quæ multiplicata per* a *dat dimenſionem propoſiti ſpatii.*

y = a√dz² + dy².
ax dy² + xx dy² = aa dz² +
ax + xx dy² = aa dz².
y√2ax + xx = a dz.
∫y√2ax + xx = az.

AP-

APPENDIX II.

De methodo transformandi curvas tum superficies, tum lineas in alias diversæ speciei, idque infinitis modis.

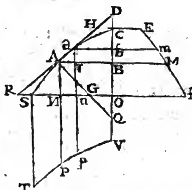
IN iisdem litteris pluries supra commemoratis, quas Cl. D. Leibnitzius occasione libelli hujus tetragonistici anno 1705. 21. Julii Hanoveræ ad me prescripsit, Problema quoddam propositum jam à D. Joanne Bernoullio mihi benignè communicavit his verbis. *Postremò ad profectum scientiæ pertinet, ut methodos per solutionem Problematum exerceamus. Sic non ita pridem D. Jo. Bernoullius proposuit hoc Problema: dato (positione) arcu Curvæ, invenire aliam curvam infinitis modis, cujus arcus aliquis, à nobis assignandus, arcui dato sit æqualis; & ita ut posito, datam curvam esse Algebraicam, etiam quæsita sit Algebraica: quod à me est solutum diversa methodo ab ea, qua ipse est usus.*

Multiplicem hujus Problematis solutionem, tum D. Lorenzino communicavi (qui & ipse idem multò generalius solvere aggressus est, nam quæsitam curvam in data ad propositam curvam ratione construxit) tum eidem D. Leibnitzio statim transmisi, sed an Epistolæ, ex tam distantisi locorum intervallo, ad ejus manus tutò pervenerint, rescire non potui. Hanc ergo solutionem meam huic libello adiungere visum fuit, præmissis etiam nonnullis maxime generalibus Theorematibus, ad transformationem curvilineorum spatiorum in alias areas diversæ speciei spectantibus, nec enim ab argumento nostro prorsus aliena sunt,

ſunt, & ad pleniorem enunciati Problematis ſolutionem valde conducunt. Horum quidem nonnulla etiam apud Cl. Barrovium invenies, ſed abſque demonſtratione propoſita; itaque operæ pretium fuit, ut eadem ſimul cum noſtris collecta, & ex præclara methodo infinitè parvorum geometricè demonſtrata tibi, benigne Lector, offerrem.

THEOREMA I.

Data qualibet figura CASO, ſi ejus coordinata AB, AN ita extendantur in M, P, ut BM ad NP ſit in ratione ordinata AB ad ſubtangentem BD, quæ hinc oriuntur areæ CEFO, SOVT, & quælibet ipſarum partes correſpondentes CEMB, VONP perpetuò æquabuntur.



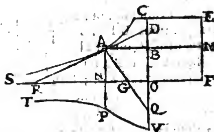
Nam ductis infinitè proximis *abm*, *anp* ad priores coordinatas parallelis, erit Nn ad Bb, ut AI ad Ia, ſive ut AB ad BD, hoc eſt ut BM ad NP, & rectangula extremarum *n*NP, & mediarum *b*BM perpetuò æqualia erunt; quare & areæ elementares N*np*P, B*bm*M (quę *per coroll.* 3. *prop.* 5. *de Infin.* his rectangulis infinitè parvis congruunt) invicem æquabuntur; unde conſtat propoſitum.

COROLL. I. Idem ſequeretur, ſi BM ad NP (extenſa tangente DAR, & ducta huic normali AQ quæ perpendiculariter curvam ſecat in A) fieret ut ſubnormalis BQ ad ordinatam BA, vel ut ipſa normalis QA ad tangentem AD, vel ut RN ad NA, vel ut NA ad NG &c.

om-

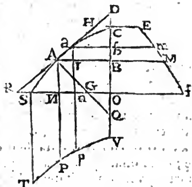
omnes enim istæ rationes, ob triangulorum similitudinem, æquantur dictæ rationi ordinatæ AB ad subtangentem BD.

COROLL. II. Hac methodo facile est datam quamlibet figuram CEFO in alias infinitas, specie, & genere differentes transformare, salva arearum æqualitate: prout scilicet alia CASO assumpta fuerit ex qualibet parabolarum, hyperbolarum, conchoidum, cissoidum, spiralium, aliarumque infinitis modis variabilium curvarum specie, juxta cujus ordinatarum, & subtangentium rationem fiat quævis ordinata BM datæ figuræ ad aliam NP figuræ quæsitæ; quin etiam poterit assumpta curva CAS vel concavitatem, vel convexitatem obvertere angulo COS, & basim habere vel infinitam, vel finitam, & determinatam, prout placuerit, ut quæsita figura proveniat majori, aut minori, vel infinito etiam axi OS adiacens, vel binis etiam asymptotis SO, OV interposita; continget quippe etiam OV infinitam evadere, si CO fuerit tangens curvæ CA, & prima ordinata datæ figuræ CE sit finitæ quantitatis, quia cùm [*ex prop. 5. de Infinit.*] intercepta inter tangentem, & curvam sit infinitè minor differentia ordinatæ, fiet ad punctum C ratio ordinatæ ad subtangentem, adeoque & ratio CE ad OV infinitè exigua, quare OV erit infinitè major quàm CE.



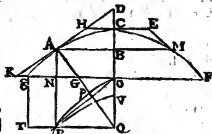
COROLL. III. pariter licebit dato trapezio, vel quadrato CEFO aut alteri curvilineo notæ mensuræ, figuras curvilineas æquales, adeoq. absolutè quadrabiles invenire, vel undiq. circumscriptas, & determinato axi SO adiacentes, vel asympto-

ptoticas, & in infinitum, sive ex utraque, sive ex altera tantū parte excurrentes; idque innumeris modis.

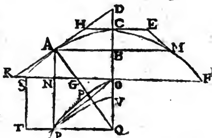


COROLL. IV. Vicissim positis quibuslibet figuris CEFO, SOVT notæ mensuræ, si ex ipsis æqualia spatia CEMB, NOVP resecentur, & ordinatæ MB, PN conveniant in A; erit curvæ hinc provenientis SAC ordinata AB ad subtangentem BD (vel subnormalis QB ad ordinatam BA) in data ratione ipsius BM ad NP, nam ex æqualitate rectangulorum infinitè parvorum MB*bm*, PN*np*, fit BM.NP :: N*n*. B*b* :: AI. *a*I :: AB. BD *ex coroll.* 2. *prop.* 5. *De Infinit.* ubi ostensum est, esse ordinatam ab subtangentem, ut differentia ordinatæ ad differentiam axis.

COROLL. V. Si curva CMFO fuerit eadem cum CASO ad alteram axis partē replicata, curva O*p*P evadet figura ex subtangentibus BD applicatis in NP, quam alteri figuræ Correlatam [*in Hugenianis cap.* 8. *n.* 5.] nuncupabā, quia cùm sit AB.BD :: BM. NP, si antecedentes, AB, BM æquantur, oportet æquales esse & consequentes BD, NP; itaque ex multò magis generali principio Correlatarum æqualitas pendet.

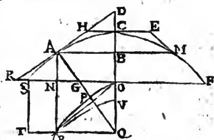


CO.



COROLL. VI. Si ordinatæ BM in figura CEFO æquentur subnormalibus BQ figuræ CA*S*, curva VP vel OP transit in rectam OP, quæ ad angulum semirectum basi O*S* inclinatur; nam *ex Coroll.* 1. BQ.BA :: BM.NP, unde quia BQ = BM, etiam BA, sive ON = NP, & ideo NOP triangugulum est isosceles rectangulum, sive dimidium quadrati NO vel AB; adeoque figura CEFO ex subnormalibus orta erit quadrabilis, & ratio totius ad partem CEMB eadem probabitur, quæ ratio quadratorum ab ordinatis *S*O, AB.

COROLL. VII. Itaque data qualibet figura CEMFO, si construi posset altera CA*S*O, cujus subnormales BQ æquales evaderent ordinatis BM, haberetur illius dimensio, nam portio quævis CEMB æquaretur dimidio quadrati BA, idest triangulo NOP; sed talis curvæ constructio ex data subnormalis proprietate generatim perfici nequit absque quadraturis; neque remedium à Cl. Craigio *in meth figur. probl.* 1. *&* 2. allatum [præterquam in parabolicis, & hyperbolicis, sive universim in iis curvis, quarum subtangentes ad abscissam axis sunt in constanti ratione) felicem exitum habere potest. *D*ocet nempe Vir acutissimus, quod si BM = y, BC = x, & invenienda sit ordinata BA = z, itaut subnormalis curvæ CA*S*, in quam terminant ipsæ z, fiat = y, considerando subtangentem B*D*, quæ ducta in subnormalem BQ dat *D*BQ = quadrato BA, & fingendo eam subtangentem = mx (quod erit, si x, idest CB, fuerit ad subtangentem B*D* in ratione 1 ad m) eliciendo æquationem $mxy = zz$, ex qua in-



veniendo subnormalem $z\,dz : dx$, & comparando valorem inventum cum ipsa y, innotescit incognitæ litteræ m valor, adeoque fit cognita æquatio $mxy = zz$; sed quia ubi m fuerit indeterminata, prodit æquatio differentialis involvens, præter dz, & dy, ac dx cognitas, etiam dm prorsus incognitam, & ad alias irreducibilem, patet nihil inde subsidii haberi posse extra speciales casus in quibus m fuerit constans & determinata, quia tunc novam differentialem non invehit, quæ calculum turbet; & ideò tangentium methodus inversa generatim quadraturas supponit, unde non est sperandum, ut vicissim per hanc inversam methodum quadraturæ figurarum in universùm absolvantur.

COROLL. VIII. Si rectæ NP eidem constanti OQ æquales fuerint, ut loco figuræ NOVP proveniat rectangulum $SOQT$, erunt spatia OCEF, BCEM proportionalia ordinatis SO, AB, utpotè æqualia rectangulis sub eadem OQ, & sub ipsis SO, & ON vel BA contentis; & differentiæ spatiorum BCEM, hoc est lineæ BM, proportionales fient differentiis ordinatarum BA, ac denique differentiæ primæ ipsarum BM, sive (retentis symbolis supra positis) ipsæ dy, erunt proportionales differentiis secundis ordinatarum BA, scilicet ipsis ddz; Unde solvitur maximæ utilitatis Problema, quærendi curvam EMF, cujus ordinatæ BM sint ut differentiæ ordinatarum datæ CAS, adeoque & cujus primæ differentiæ dy proportionentur secundis alterius differentiis ddz, faciendo semper, ut subtangens BD (quam voco s) ad ordinatam BA, nempe z, ita constans OQ, sive a ad $az:s$, quæ æquabitur BM, sive y quæsita.

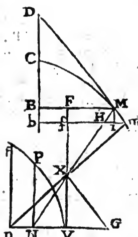
SCHO-

SCHOLION.

Descendendo ad speciales cujuslibet curvæ naturas, innumera alia jucunda Theoremata hinc orirentur, quæ lectoribus meis, ad exercendam geometricam methodũ, exponenda relinquo; idemq. in sequentibus observabo.

THEOREMA II.

Figuræ C*M*mb, *VP*pn *ita referantur, ut per fixum punctum* X *juncta qualibet MX, secante positione datam VN ordinatis MB parallelam in N, ductaque* XG *tangenti MD parallela, necnon ad ipsas BM, NV demissa per X perpendiculari FXV, sit semper* NG.XF :: *BM.NP; erunt area CMB, VPN perpetuò æquales.*

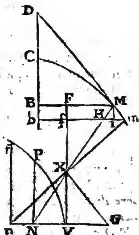


Ducta enim infinitè proxima *n*X*m*, & ordinatis *np*, *mb*, quarum hæc secet priorem NXM in H, ductaque MI ad ordinatas perpendiculari, erit *n*N.*m*H :: *n*X.X*m*, sive [ob infinitè parvam differentiam, quæ *per coroll. 2. prop. 3. de Infinit.* non alterat proportionem] :: NX.XM :: VX.XF; at verò *m*H.*M*I :: NG.XV (ob similitudinem triangulorum M*m*H, NGX) ergo ex æquo perturbatè *n*N.MI :: NG.XF :: *BM*.*NP* *ex construct.* ideoque rectangula PN*n*, MB*b* perpetuò æquantur; unde liquet propositum.

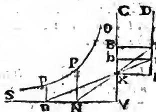
COROLL. I. Si punctum X fuerit in axe CB, tum coin-

 cident

cident puncta B, & F, & linea XF fiet XB, & expeditior evadet constructio.

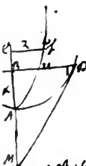


COROLL. II. Pro vario situ puncti X, quod vel citra, vel ultra axem, vel in axe, vel in perimetro figuræ, vel intra ipsam, vel supra, vel infra sumi potest; necnon pro varia distantia rectæ VN ad eodem fixo puncto X, variatur species, & forma figuræ VPN, manente semper ejus æqualitate cum ipsa CMB, quæ ideò infinitis modis in alias, & alias æquales figuras etiam per hanc methodum poterit transformari.



COROLL. III. Si linea Mm recta fuerit axi parallela, tum recta XG coincidet cum XV, eritque solùm NV . XB :: BM . NP, & curva Pp erit hyperbola quadratica, nam facta XV $= b$, & BM $= a$, & VN $= z$, fit XB $=$ quartæ proportionali post z, b, & a (ob similia triangula NVX, MBX), adeoque BX $= ba : z$; est autem ex curvæ Pp constructione VN, scilicet z ad XB, nempe $ba : z$, ut BM ad NP; ergo hęc $= baa : zz$, & ideo $zz . aa :: b . $ NP; seu quadrata abscissarum NV, Vn sunt reciprocè ut ordinatæ np, NP; itaque hinc etiam habetur, infinitè longum spatium $PpSnN$ esse finitæ dimensionis, & æquari rectangulo XFMB; reliquum verò OPNVB $=$ infinitæ areæ rectanguli interminati CBMD; & rectangula PNV, pnV

erunt

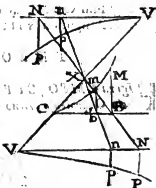


curva CAB, le cui ordinate CB $= y$, BA $= x$; ... un'altra curva ... CA $= u =$ BD ordinate di un'altra ... AI $= u$; e KF $= z$. Si facciano ... lo spazio CAB sarà ... è manifesto, che se si pone $\int y dx = z du$; ... AKF; si tratta adesso di ritrovare z, e du; ... $u dx / m = du$ ... sarà ... Parabola ...

erunt ad invicem, ut BX, *bX*, sive ut rectangula XBM, X*bm*, quibus æquantur.

COROLL. IV. Erit tamen asymptotus VO hyperbolæ *p*P infinities major altitudine infinita XC parallelogrammi interminati XD, quia cùm sit permutando NV.BM :: XB.NP, ubi NV sit infinitè parva, & manente constanti BM, ipsa XB migrat in absolutè infinitam XC, tunc NP, quæ jam evadit eadem cum asymptoto VO, est quarta proportionalis post easdem, ideoque ut NV est infinitè minor BM, ita infinita XC sit infinitè minor asymptoto VO; quare hæc est plusquam infinita respectu illius. Vide dicta *in tract. de Infin. prop.* 8. *n.* 4. *& alibi*.

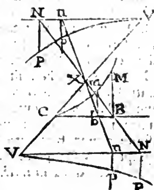
THEOREMA III.



Curvæ CmM, *Vp P ita invicem referantur, ut ex fixo puncto X sumpto in recta VC, quæ vertices utrinsque conjungit, & inclinata qualibet* XBN, *secante utrinsque axes parallelos in punctis B, N, sit semper ordinata BM ad ordinatam NP, ut reciprocè VX ad* XC. *Dico, areas CMB, VPN semper æquales fore.*

Agatur enim infinitè proxima X*bn*, atque ordinentur *bm*, *np*; igitur ob similitudinem triangulorum, erit N*n*. B*b* :: NX. BX :: VX. XC :: BM. NP *ex construct.* ergo rectangula extremarum, & mediarum æquantur, scilicet spatiolum PN*np* = spatiolo MB*bm*, unde patet utriusque areæ æqualitas; Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc pariter, pro vario situ puncti X, & linea-



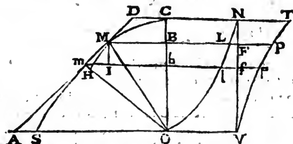
linearum CB, VN distantia, diversæ constructiones arearum VNP datæ cuidam CMB æqualium haberi possunt, non tamen semper diversi generis.

COROLL. II. Etiam rectangula CBM, VNP his areis circumscripta semper invicem æqualia fient, propter BM.NP :: VX. CX :: VN.CB, unde liquet rectangulorum ab extremis, & medijs factorum æqualitas.

COROLL. III. Proinde hinc deducitur, permutando, eandem semper futuram rationem areæ CMB ad circumscriptum rectangulum CBM, quæ est areæ VPN ad circumscriptum rectangulum VNP.

THEOREMA III.

Figura CMSO, CTPVO ita referantur, ut ex fixo puncto O protenso ramo OM, ordinataque MBP, ductaque



tangente MA, sit semper BP = medietati ipsius OA, erunt area CMO, CTPB perpetuò æquales.

Ex

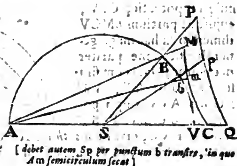
Ex puncto *m* infinitè proximo ordinetur *mbp*, jungatur autem *m*O, & agantur in ipsas *m*O, *mb* perpendiculares MH, MI: erit MI sinus anguli *m*MI, sive interni, & oppositi parallelarum MAO; sed MH erit sinus anguli *MmO*, vel ejus consequentis A*m*O, aut (ob infinite parvam utriusque differentiam *m*OM nihil æqualitati derogantem *ex prop.* 7. *de Infin.*) ipsius AMO; sunt autem sinus angulorum MAO, A*MO*, ex Trigonometria, ut *M*O ad OA, vel ut dimidia MO ad dimidiam OA, sive ad BP, ergo MI, seu B*b* ad MH est ut dimidia *M*O ad *B*P, & ideò rectangulum extremorum *bBP* = rectangulo mediorum, scilicet dimidiæ *M*O in *M*H, hoc est sectori *M*OH; vel triangulo *MOm*; & hoc semper; Quare &c.

COROLL. I. Conguit hoc demonstratis supra *in Coroll.* 7. *prop. Appendicis*. quamquam alia methodo, & in figura ex duplis ordinatis facta id ostenderimus.

COROLL. II. Si figuræ CMSO tangens in C sit basi OS parallela, fiet CT asymptotus figuræ OVP, ut potè = 1 : 2 ipsius OA, quæ tunc infinita evasit.

THEOREMA V.

Area ACM, SQP ita referatur, ut radio SA descripto semicirculo ABV, secante ramum AM in B, & juncta SBP, sit semper AM potestate dupla ipsius SP: Dico areas AMC, SPQ æquales esse.

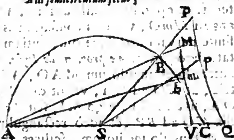


[*debet autem* Sp *per punctum* b *transire, in quo* Am *semicirculum secat*]

Facta

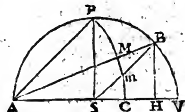
FActa solita constructione infinitè proximarum Abm, Sbp; quoniam sectores infinite exigui, qui spatiis AMm, SPp, quibus adscribuntur, congruunt (*ex prop. 5. De Insin.*) rationé habent compositam ex ratione quadratorum à radiis AM, SP, & angulorû MAm, PSp; in hoc autem casu hæ rationes sunt reciprocæ, quia angulus BSb ad centrum duplus est anguli BAb ad circumferentiam, ut vicissim, *ex constructi.* supponitur quadratum AM duplum quadrati SP: manifestum est hinc prodire rationem æqualitatis, adeoque semper $MAm = PSp$; Quod erat &c.

[*debet autem Sp per punctum b transire, in quo Am semicirculum secat*]



COROLL. I. Datæ figuræ ACM æquales innumeras hac methodo assignare licet, electo ad arbitrium puncto S in majori, aut minori distantia à fixo puncto A, descriptoque semicirculo radii SA, & completa constructione, quam Theorema præscribit, unde semper diversa prodit figura.

COROLL. II. Hinc Lunulę Hypocraticę CPV, cujusque partium $BMCV$ dimensio ex hac magis generali affectione pariter deducitur; Nam cùm sint semper radii AP, AM sectoris APC dupli potentia radiorum SP, SB sectoris PVS, erit *ex hoc theor.* $APC = PSV$, & ablato communi SPC, fit $APS =$ semilunulæ CPV; item quia



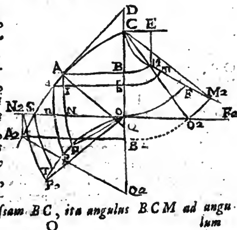
eodem

eodem ratiocinio *A M C* = *S B* V, dempto communi S *m* C; & addito utrinque *M m B*, fit A *B S* = *M B* V C; Unde amplius ducta perpendiculari *B* H, patet fore totam C P V ad partem C *M B* V :: P S . *B* H, in altitudinum scilicet ratione, in qua sunt etiam triangula A P S, A *B* S ejusdem basis A S.

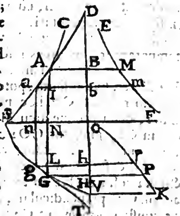
COROLL. III. Si loco semicirculi (*vide fig. 1. adversæ pag.*) alia curva A *B* V supponatur, in qua ex focis A, S inclinatæ lineæ ad quodvis perimetri punctum *B* faciant semper angulos, internum S A *B*, & externum *B* S V, in data ratione *n* ad *m* (quales quidem curvas olim construendas mihi proposuit Doctiss. P. Thomas Ceva Soc. Jesu, ut videre est in meo Tractatu *De novis lineis Curvis*) tunc si vicissim S P q., A M q. sint in eadẽ ipsa ratione *n* ad *m*, areę AMC, SPQ magis generali constructione ęquales resultabũt.

COROLL. IV. Quocirca, pro varietate assumptæ Curvæ A B V, licebit innumeris modis dato spatio A M C æqualem rursus aream S P Q exhibere.

THEOREMA VI.



TRes figuræ *CASO*, *CMFO*, *atque OPTS ita referantur, ut ductis ubilibet coordinatis prioris figuræ AB, AN, & perpendiculari AQ ad curvæ tangentem AD, centris autem C, O descriptis circularibus arcubus BM, NP, ac junctis subtensis CM, OP, fit semper, ut subnormalis QB ad abscissam BC, ita angulus BCM ad angulum*



HG vel AB, & ex AB ad BD; at prior ratio eadem eſt, quæ Hh, ſive GL, ad Lg, vel Ia, ſecunda verò eadem quæ Ia ad ad AI vel Bb, ex quibus reſultat ratio Hh ad Bb; ergo BM. HP :: Hh. Bb, ideoque ſpatium MBbm = PHhp; atque hoc ſemper; unde conſtat propoſitum.

COROLL. I. Hinc nedum pro varia curvæ CAS natura, ſed & pro varia ſpecie alterius curvæ SGV, infinitis modis variari poteſt conſtructio areæ VKPH datæ cuidam EMB æqualis.

COROLL. II. Si pro curva SGV ſubrogaretur recta ad angulum ſemirectum inclinata ST, quia ſubtangens TH ſemper æquaretur ipſi HG, vel BA, tunc conſtructio hujus Theorematis conveniret cum conſtructione Theorematis primi, quod propterea unum tantùm ſpecialem caſum hujus ſeptimi conſtituit, tametſi generaliſſimum illud videretur: id tantùm diſcriminis intercederet, quòd ſitus figuræ *K* VHP illam non baſi OS adiacentem ſtatuit, ſed ſecus axem DO productum collocat, tametſi eadem prorſus & numero, & ſpecie utrobique reſultet.

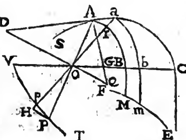
COROLL. III. Si figura EMB fuerit eadem cum CAB, ad alteram ſcilicet axis partem replicata, quoniam tunc BM = BA = HG, erit TH. BD :: GH. HP; & ABba = MBbm = PHhp; unde datæ cuilibet figuræ CAB æqualem VKPH aſſignabimus hac alia conſtructione: eligatur figura quælibet SGV, & ducta AG axi BO parallela, necnon utriuſque curvæ tangentibus in A, & G, quæ ſint AD, GT, fiat ubilibet TH. BD :: AB, vel GH. HP;

erit-

eritque spatium CAB = VKPH; idque infinitis modis variabitur, pro varietate assumptæ figuræ SGV.

THEOREMA VIII.

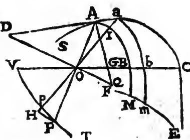
Curvarum CAS, VPT, EMF ea sit proprietas, ut ex quodam fixo puncto O educto ad primam curvam ramo AO, secante secundam in P, ductaque tangente AD, occurrente ipsi OD, quæ perpendicularis est ramo AO, in puncto D, descriptoque arcu circulari AB, centrum O respiciente, atque ordinata ad posteriorem curvam BM, sit semper rami AO quadratum ad rectangulum subtangentis OD, & rami OP, ut medietas rami OP ad ordinatam BM: erunt areæ CEMB, OPV perpetuò æquales.



Facta infinitè proxima constructione, quam representat figura; quoniam quadratum AO ad rectangulum DOP est in ratione composita ex ratione AO ad OD, idest aI, sive Bb ad AI, & ex AO ad OP, hoc est AI ad PH, quæ duæ rationes componunt rationem Bb ad PH, erit ergo Bb ad PH, ut medietas rami OP ad ordinatam BM, & rectangulum MBbm = rectangulo ex 1 : 2 OP in PH, idest sectori OPH, vel OPp. Ex quo constat propositum.

COROLL. I. Hinc infinitis modis, data alterutra figurarum CEmM, & VpP, altera invenitur, pro diversitate Curvæ assumptæ CA.

COROLL. II. Quia quadratum AO = rectangulo subtangentis DO in subnormalem OQ, erit etiam DOQ ad DOP,



DOP, ideſt QO ad OP, ut medietas OP ad BM, & rectangulum ex OQ in BM = dimidio quadrati OP; Quare ſi etiam juxta hanc rationem exprimatur propoſitarum figurarum relatio, ſubſiſtet correſpondentium arearum æqualitas.

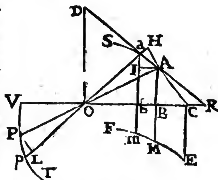
COROLL. III. Si rami OP ſint æquales ſubnormalibus figuræ SAC, hoc eſt ipſis OQ, erit MB = dimidiæ OQ; ſin verò BM = OQ, vel OP, erit figura BCEM dupla ſectoris OPV, ſed curva EMF = curvæ VPT; quia cum ſit $aI.IA::AO.OD::OQ$ (ſeu $PO).OA::PH.IA$, fiet aI, ſeu $Bb = PH$; cùm ergo & differentia ordinatarum MB in tali caſu æquetur Hp differentiæ ramorum OP, manifeſtum eſt, elementum curvæ Mm (potentia æquale tum differentiæ ordinatarum, tum differentiæ axis Bb) = elemento curvæ Pp [quod poteſtate æquatur utrique Hp, HP], quare & integræ curvæ æquabuntur.

COROLL. IV. Hinc obiter datæ figuræ VPO, in punctum convenientibus ramis comprehenſæ, poſſumus competentem figuram CEMB prioris duplam, ſed eadem curvæ longitudine ſervata, per ramos eoſdem in totidem ordinatas BM invicem parallelas expanſam aſſignare, aut viciſſim data hac expanſa illam involutam per ramos in commune centrum abeuntes exhibere; hoc enim habetur, inveniendo talem curvam CAS, cujus ſubnormales OQ æquent ſive ramos, ſive ordinatas datę figuræ; Pro quo, fiat conſtans quædam OB, ad libitum aſſumpta = a, & arcus BI, radio OB deſcriptus = z; ſit autem data Op, vel $bm = y$; Si ex figura convoluta OVP quæritur expanſa CEM, intelligantur omnes rami OP, Op erigi in punctis

ctis correspondentibus A, I arcus BA, & superficies hinc orta, quæ erit $\int . y d z$, applicetur ad datam a, prodibit in quotiente longitudo Oa, vel OA determinans puncta Curvæ CaA, unde arcubus ab, AB descriptis, ordinatisque bm, BM dabitur expansa EmM; Sin vero ex data expansa quæratur convoluta, ponatur $Ob = x$ & facta ipsi EmM figura reciproca, cujus ordinatæ $= aa : y$, applicetur ejus spatium, nempe summa ex $aadx : y$, ad a; prodibit longitudo arcus z, puta BI, per quem extendendo ramum Ob, & in hoc sumpto $Op = bm$, fiet convoluta CpP; Nam differentiando in primo casu erit $ydz = adx$; in secundo casu $aadx : y = adz$, aut ut antea $adx = ydz$; ergo $a . y :: dz . dx$; sed & $a . y :: dz$. PH; ergo PH $= dx = Bb$; unde ob æqualitatem ramorum OP, & ordinatarũ BM, curvæ ipsæ VP, EM æquantur. Vide dicenda infra *Theor. 16. ejusq. coroll.*

THEOREMA IX.

Sint jam AB, a b *recta ad ipsam OC perpendiculares, loco arcuum figuræ præcedentis; itemque subtangens OD sit eidem OC ad angulos rectos; sit autem, ut priùs, quadratum rami OA ad rectangulum DOP, ut medietas OP ad BM; erunt area CEMB, OVP perpetuò æquales.*



DUctis infinitè proximis Oap, abm, & arcubus PL, AH, atque aI ipsi OC parallela, erit Bb, sive AI,

ad

ad PL in ratione composita ex AI ad AH, & AH ad PL; sed prima ratio est eadem, quæ sinus anguli AaI [vel ADO] ad sinũ anguli AaH, seu DaO, aut DAO, quę ex trigonometricis, eadem est rationi oppositorum laterum OA, OD; secunda autẽ ratio eadem est, quæ ramorum OA, OP, ex quibus duabus rationibus componitur & ratio quadrati OA ad rectangulum DOP, idest per constructionem dimidiæ OP ad BM; ergo erit Bb . PL :: OP : 2 . BM; & ideò rectangulum MBbm = PL in OP : 2, idest = triangulo, aut sectori POL, sive POp; quare constat propositum.

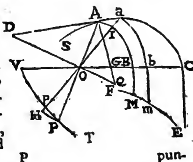
COROLL. I. Infinitis modis similiter variabitur alterutra figurarum PVO, MEC, pro diversa curva CaA, qua uti quis velit ad assignandam alteri ex datis figuris aliam aream æqualem, per hujus Theorematis constructionem.

COROLL. II. Si quadrata OA æquentur semper rectangulis DOP, & ipsis OP æquales ponantur BM, resultabit area CEMB prioris OVP dupla; eritque pariter curva VP = curvæ EM, & hęc quidem illius involutæ expansa evadet; nam cum ostensa sit ratio quadrati AO ad rectangulum DOP æqualis rationi Bb ad PL, ubi illa fuerit æqualitatis, etiam hæc dabit Bb = PL, unde cùm et differentia ramorum OP æquetur differentiæ ordinatarum BM, fiet altera convoluta, altera expansa figura, ut supra *coroll. 3. præced.* dictum fuit.

COROLL. Tam in hoc, quàm in præcedenti Theoremate eadem sequentur, si fuerit, ut quadratum OA ad quadra-

dratum OP, ita dimidia OD ad BM; cùm sit enim quadratum OA ad rectangulum DOP, ut dimidia OP ad BM, & rectangulum DOP ad quadratum OP, ut DO ad OP, sive ut dimidia DO ad dimidiam OP, erit ex æquo perturbatè quadratum OA ad quadratum OP, ut dimidia OD ad BM. Quod etiam sic aliter demōstratur. Quadratū AO ad quadratum OP est, ut triangulū AOH [*figuræ hujus Theorem.*] vel AOI (*fig. seq. quæ ad præcedens Theorema pertinet*) ad simile OPL *in primo schemmate*, sive OPH *in secundo*, sive, ut elementaria spatia, quæ ab his comparabiliter non differunt, AO*a*, OP*p*; sed propter OD ad OA [*in primo casu*, *& ex demonstratis in hoc theor.*) ut AH ad AI vel *Bb*, sive [*in altero casu*] ut AI ad I*a*, vel pariter *Bb*, erit dimidia OD in *Bb* = triangulo OAH primi, aut OAI secundi casus, idest utrobique = areæ elementari OA*a*; Si ergo dimidia OD ad *BM*, seu rectangulum dimidiæ OD in B*b* ad MB*bm*, est ut OA quadratum ad OP quadratum, nempe ut OA*a* ad OP*p*, ob antecedentium OD : 2 in B*b*, & OA*a* æqualitatem, fient æqualia & consequentia MB*bm*, & OP*p*.

COROLL. IV. Vicissim si figuræ quælibet OVPT, OCEF ita comparatæ fuerint ad communem axem VOC, & ipsarum partes VOP, ECBM semper æquales resecentur, conveniant autem rectæ PO, MB in punctum A, sitque ut quadratum OP ad quadratum OA, ita BM ad aliam, cujus dupla ponatur OD ipsi MB parallela, juncta DA tanget curvam CA*a*, quæ per omnia puncta A, *a* dictorū concursuū incedit.



COROLL. V. Idem dico in casu, & figura præcedentis theorematis, si concurrat PO cum arcu BA, radio O *B* descripto, ad pun-

punctum A, ut oriatur similiter figura C*a*A, ponendo ipsi OA perpendicularem OD pariter duplam dictæ quartæ proportionalis post quadrata OP, OA, & rectum BM, juncta enim DA pariter tangens erit ipsius C*a*A: etenim si non hæc OD foret in utroque casu hujus, & præcedentis corollarii subtangens dictæ figuræ, sed alia *s*, foret OA quadratum ad quadratum OP, *ex coroll.* 3. ut dimidia *s*. ad *B*M, sed etiam ex constructione est ut dimidia DO ad *B*M, ergo DO = *s*

THEOREMA X.

Ex punctis fixis O, B ad quodvis punctum A curvæ CA inclinatis ramis OA, BA secantibus curvas CP, CM in P, & M, ductaque tangente AD, & DR, DQ ad utrumque ramorum parallelis, habeat semper OP quadratum ad quadratum BM eandem rationem, quam OAR ad BAQ; erunt area OCP, BCM perpetuò æquales.

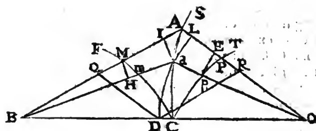
Sum-

Sumpto infinitè proximo puncto *a*, jungantur O*a*, B*a*, secantes in *p*, & *m* curvas CP, CM, ductisque ex centro O arcubus *p*E, *a*L, & ex centro B arcubus MH, *a*I; erit ratio MH ad *p*E composita rationibus MH ad *a*I, & *a*I ad *a*L, & *a*L ad *p*E; quarum prima eadem est cum ratione B*m* ad B*a*, seu BM ad BA; secunda eadem, quæ sinus anguli IA*a*, vel alterni ADR, ad sinum anguli LA*a*; hoc est eadem quæ laterum AR, RD, aut AR, AQ; tertia denique eadem est, quæ *a*O ad O*p*, sive AO ad OP; ergo MH ad *p*E rationem compositam habet ex BM ad BA, & RA ad AQ, & AO ad OP, sive est ut rectangulum OAR in BM ad rectangulum BAQ in OP; cùm ergo ex hypothesi rectangulum OAR ad rectangulum BAQ sit, ut quadratum OP ad quadratum *B*M, erit MH ad *p*E, ut quadratum OP in BM ad quadratum BM in OP, hoc est ut ramus ipse OP ad ramum BM; & ideò sectores O*p*E, *B*MH, sive areæ ipsæ O*p*P, *B*M*m*, perpetuò æquabuntur; ex quo constat propositum.

COROLL. I. Data ergo alterutra ex his figuris, putà OCP, alteram CM*B* ipsi æqualem constituemus, electa qualibet alia curva C*a*A, et puncto fixo B, ductisque ramis OA, BA, necnon tangente AD, completoque parallelogrammo ARDQ, faciendo, ut OAR ad BAQ, ita quadratum dati rami OP ad quadratum BM, cujus ultimum punctum M ad alteram curvam C*m*M pertinebit; suscipiet autem quæsita area CMB infinitam varietatem, tum ratione variæ positionis puncti B, tum ratione diversæ curvæ C*a*A, quæ ad constructionem assumpta fuerit.

COROLL. II. Idem sequitur, si quadratum OP ad quadratum MB fuerit, ut rectangulum ORA ad quadratum RD, hæc enim ratio eadem est rationi rectanguli OAR ad BAQ, ob rationes componentes æquales OA . AB :: OR . RD, quibus addita eadem ratione RA ad RD, vel AQ, fit ratio OAR . BAQ :: ORA . RD quadratum.

COROLL. III. Vicissim ex datis areis *B*CF, OGT si æquales portiones abscindantur CMB, CPO, & rami BM, OP conveniant in A, curvæ hinc resultantis CAS tangens AD invenietur, sumpta ad libitum rami OA portione AR, tum faciendo, ut quadratum OP ad quadratum BM, ita rectangulum OAR ad rectangulum BAQ, completoque parallelogrammo QARD, jungatur diameter AD, quæ erit tangens.



COROLL. IV. Si fuerit CAS conica sectio, cujus foci O, B: quoniam tangens DA bifariam secat angulum OAB (*per* 48. 3. *Conic.*) erit angulus DA*B*, sive alternus RDA = RAD, unde RD = RA; itaque cùm ex *Coroll.* 2. sit quadratum ipsius rami OP ad quadratum BM, ut rectangulum ORA ad quadratum RD, erit primum quadratum ad secundum, ut OR ad RD, vel RA, aut ut OA ad A*B*, vel ut OD ad DB.

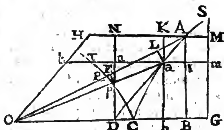
COROLL. V. Quia ex hujus Theorematis, aut Problematis constructione erit quadratum PO in BAQ rectangulum = quadrato BM in rectangulum OAR, si BM supponatur = BA (hoc est si curva C*m*M conveniat cum C*a*A, ut ipsamet area BCA æqualis evadat areæ OGP) loco BM, ponendo BA, erit quadratum PO in BAQ = quadrato BA in OAR, hoc est quadratum PO in AQ =

= OAR in BA, & quadratum PO.OAR :: BA.AQ :: OA.OR; unde quadratum PO in OR = OAR in OA = quadrato OA in AR; iterumque quadratum PO ad quadratum OA :: AR.OR :: BD.DO; ideoque si fiat ut OD ad DB, ita quadratum OA ad quadratum OP, erit punctum P ad Curvam C*p*P, cujus area OCP = ipsi ACB, absque intermedia alia curva constructionem regulante, & pro diversa positione puncti O, diversis modis curva CP construetur, & in alterius generis areas transformabitur: non tamen per idem punctum C transibit, per quod incedit curva CA, nisi cùm fuerint polorum distantiæ OC, BC æquales; semper enim distantia verticis curvæ TP*p* à puncto O debet esse media proportionalis inter CO, CB; eoquod puncto A descendente ad C, ipsum etiam punctum D congruit eidem C, unde tam OA quàm OD fit = OC, & BD evadit BC: propatereaque analogia *O*D. DB :: *O*Aq. *O*Pq. vertitur in hanc, *O*D ad CB ut *O*Cq. ad quadratum distantiæ verticis curvę TP*p* à puncto *O*.

COROLL. VI. Eadem constructio præcedentis corollarii sic poterat demonstrari. Tam triangula OAD, DAB, quàm *Oα*D, D*α*B sunt in ratione basium OD, DB; quare & reliquorum triangulorum ratio eadem erit; igitur A*O*α. AB*α* :: *O*D. DB; si ergo *O*D. DB :: *O*Aq. *O*Pq. hoc est :: *Oα*q. *Op*q. vel *Oα* L. *Op* E, aut A*Oα*. P*Op*, fiet A*Oα*. AB*α* :: A*Oα*. P*Op*; quare AB*α* = P*Op*. & sic semper.

COROLL. VII. Positis iisdem, si fuerit CA conica sectio, cujus foci *O*, *B*, erit *O*P media proportionalis inter *O*A, A*B*; sic enim *O*A quadratum ad *O*P quadratum erit ut *O*A ad A*B*, sive (ob angulum *O*A*B* à tangente AD bifariam sectum) ut *O*D ad D*B*.

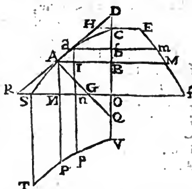
COROLL. VIII. Quodsi (*ut in figura sequenti*) focus *B* ad infinitam distantiam recedat, vel hoc fiet juxta ipsam lineam C*B*, vel juxta aliam huic perpendicularem; quomodo rami paralleli invicem evadent, ipsique C*B* in primo



mo casu æquidistabunt, velut AM, *am*, in secundo illi perpendiculares erunt, quemadmodùm A*B*, *ab*; Et in primo casu figura ACGM dupla erit areæ OCP, si fuerit semper OD ad AM, ut quadratum AO ad quadratum OP; in secundo autem figura AC*B* ejusdem areæ OCP dupla fiet, cùm fuerit OD ad D*B* in eadem ratione quadrati AO ad quadratum OP; Nam (præterquàm id colligitur ex præcedentibus considerationibus infinitè parvorum ad hos casus applicatis) ducta OH tangenti AD, & DN ipsi A*B* parallela, fiet HA = OD; ergo parallelogrammum HA*a*h ad parallelogrammū AI*m*M est in ratione OD ad AM, ad parallelogrammum verò N*n*IA, aut KA*Bb*, est ut OD ad D*B*, quia ergo utraque hæc ratio eadem supponitur rationi quadrati AO ad quadratum OP, seu trianguli AO*a* ad triangulum OP*p*, erit parallelogrammum HA*a*h ad parallelogrammum AI*m*M, aut A*Bb*K, ut ttiangulum AO*a* ad triangulum PO*p*; sed primum est duplum tertii, nempe HA*a*h duplum est est trianguli AO*a*, ergo & secundum duplum est quarti, ideoque tum AI*m*M, tum A*Bb*K in utraque hypothesi duplum probatur trianguli PO*p*, & sic semper, unde & area AMGC, vel AC*B* dupla erit spatii OCP.

THEOREMA XI.

In figuris CASO, CEMSO, si fuerit, ut subtangens BD ad tangentem DA, ita semper ordinata AB ad ordinatam BM,



BM, erit area CEMFO ad curvam superficiem ex arcu CAS circa axem CO revoluto genitam, ut radius ad circularem peripheriam.

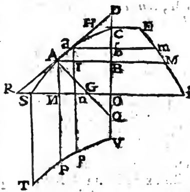
NAm *Bb*, sive *a*I.*a*A :: *B*D.DA :: A*B*. BM; ergo rectangulum extremorum MB*bm* = rectangulo mediorum, ideſt facto ex ordinata A B in arcum A*a*; Sed hoc ad zonam curvæ ſuperficiei ab arcu A*a* circa CO genitam (quę = rectangulo ipſius A*a* in peripheriam à radio A B deſcriptam) eſt ut radius ad circularem peripheriam; ergo & MB*bm* ad ejuſmodi zonam eſt in eadem ratione: & hoc ſemper; quare ut unum ad unum, ita omnes ad omnes, ideoque integra figura CEMFO ad ſuperficiem à curva CAS deſcriptam eſt in eadem ratione, radii circuli ad ejus peripheriam; Quod erat &c.

COROLL. I. Patet, aream CEMFO = Ungulæ cylindricæ ſuper arcu CAS erectæ, & abſciſſæ plano per axem CO tranſeunte, atque ad planum COS per angulum ſemirectum inclinato, quippequæ Ungula nihil aliud eſt, quàm factum ex ipſis ordinatis A*B* ſuper arcu CAS erectis; cùm oſtenſum ſit, ubique BA in *a*A = M*Bbm*.

COROLL. II. Cùm verò in decem præcedentibus Theorematibus oſtenſum ſit, poſſe aream CEMFO infinitis modis in alias OVPTS tranformari, inveniri poterunt innumeræ areæ planæ, quæ ad curvam ſuperficiem conoidis, ex figura CASO geniti, ſint in data ratione radii ad circumferentiam.

COROLL. III. Eadem ſequentur, ſi A*B* ad BM ſit in alia

alia æquivalenti ratione, ut A*B* ad AQ, vel AN ad AR, aut NG ad GA.

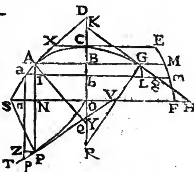


COROLL. IV. Manifestum est, ordinatas *BM* figuræ CE*f*O æquari perpetuò normalibus AQ, quę perpendiculariter curvam CAS secant in A, propter DB . DA :: A*B* . AQ :: A*B* . *B*M; Quod si areæ CE*f*O æqualis OVTS, juxta constructionem Theorematis primi, describatur, erunt NP = tangentibus AD, propter D*B* . *B*A :: DA . AQ :: NP . *B*M.

COROLL. V. Si CAS sit arcus circuli, cujus centrum Q, fiet EM*f* linea recta diametro CO parallela, propter normales AQ semper æquales eidem radio: itaque rectangulum ex radio in sinum versum C*B* æquabitur Ungulæ ex sinibus rectis super arcu CA elevatis (ut alibi ostendimus) eritque idem rectangulum ad portionem sphericæ superficiei ab arcu CA genitam, ut radius ad circumferentiam, sive ut idem rectangulum ad cylindricam superficiem ab ipso circa C*B* revoluto descriptam; unde æqualitas portionum superficiei sphericæ cum portionibus æquè altis superficiei cylindricæ circumscriptæ, ex multò magis generali principio, quàm unde idipsum Archimedes deduxit, demonstratur.

COROLL. VI. Si fuerit CAS parabola, etiam CEM*f*O ex normalibus AQ in EM ordinatis resultans, erit portio parabolica (*ex Vinc. Viv. de Loc. sol. l.* 1. *pr.* 38.) unde Ungulæ super arcu parabolico erectæ quadratura, & superficiei conoidalis dimensio innotescit.

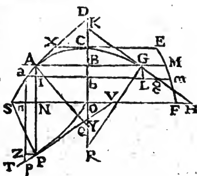
COROLL. VII. Si Curvæ *C*GH subnormales *B*R sint æqua-



æquales normalibus AQ curvæ CAS, erit cujusvis ordinatæ BG circulus æqualis conoidali superficiei ex correspondente arcu CA, circa CB revoluto, descriptæ; nam ex *Coroll. 6. Theor. 1.* area CEMB, cujus ordinatæ BM = AQ = BR, est æqualis dimidio quadrati *B*G, adeoque est ad circulum radii BG [ob communem altitudinem BG, qua ducta in dimidium BG, resultat dimidium ejus quadrati, ducta verò in dimidiam suam peripheriam, resultat circulus] ut dimidia BG ad dimidiam peripheriam à BG descriptam, vel ut integra B G ad suam peripheriam; aut (*ex hoc Theor.*) ut area CEM*B* ad superficiem conoidalem ab arcu CA progenitam; manifestum est igitur, dictum circulum radii BG æquari præscriptę conoidicę superficiei. Exemplum illustre habemus in circulo radii QC, cujus normales QA sunt semper ejusdem quantitatis, & ideò subnormales BR correspondentis curvæ CG item æquantur; quod indicat, hanc curvam fore parabolam latere recto = 2QC, sive diametro ipsius circuli, proptereaque BG quadratum = rectangulo dictæ diametri in sinum versum CB, = quadrato subtensæ CA, ideoque recta coniungens puncta C, & A = BG, & ideò sphèrica superficies ab arcu CA producta = circulo, quem ejus subtensa CA describeret, ut Archimedes ostendit.

COROLL. VII. Similiter si figuræ OPN subnormalis NS fuerit æqualis tangenti AD, erit circulus radii NP æqualis eidem conoidicę superficiei ab arcu CA circa CB productæ, ut ex secunda parte quarti Corollarii, & ex

Q pre-



præcedenti conſtat : vel etiam hoc modo; pZ ad Lg rationem habet compoſitam ex pZ ad ZP vel aI, ex aI ad IA vel GL, & ex GL ad Lg; ſed prima ratio æquatur SN, vel AD ad NP: ſecunda ratio æquatur AB ad BD, aut QA vel BR ad AD: tertia ratio æquatur BG ad BR; ergo pZ ad Lg eſt in ratione compoſita ex BG ad BR, ex BR, ad AD, & ex AD ad NP; hoc eſt æquatur BG ad NP, aut peripheriæ radio BG ad peripheriam radio NP deſcriptam, & factum extremorum, ideſt pZ in peripheriam radii NP, æquatur facto mediorum, ideſt Lg in peripheriam radii BG; quare Zona circularis, qua circulus radii np excedit circulum radii NP, æquatur circulari Zonæ, qua circulus radii bg ſuperat circulum radii BG; unde & ipſi circuli np, bg, aut NP, BG æquabuntur, ob æquales ſemper differentias infinitè parvas ipſorum; cùm igitur *ex præced. Coroll.* circulus radii BG æquet ſuperficiem conoidicam ab arcu CA, etiam circulus radii NP eidem conoidicæ ſuperficiei æquabitur.

THEOREMA XII.

IN figuris OPp, SAC, EMF, *ſi fuerit, ut tangens* PY *ad ſubtangentem* BD, *ita ordinata* BM *ad ordinatam* NP, *erit area* CEM *ad conoidicam ſuperficiem ab arcu* OP *circa* ON *generatam, ut radius ad circumferentiam.*

FActa enim conſueta conſtructione infinitè parvorum, erit Pp ad Nn vel aI, ut PY ad NO vel AB, ipſa aI ad

ad IA vel Bb, ut AB ad BD, & ex æquo $Pp.Bb$::PY. BD:: BM.NP ex hypothesi: quare factum ex Pp in NP [ideſt elementum Ungulæ, ex ſuperficie cylindrica ſuper arcu OPp reſectæ plano per ON tranſeunte, ac per 45 gradus baſi NOP inclinato] æquabitur rectangulo MBbm; unde & tota Ungula toti areæ CEMB æqualis erit; & quia ex dictis *in præced Theor.* illa Ungula eſt ad ſuperficiẽ conoidicam ab arcu OPp circa ON, ut radius ad circumferentiam, etiam area CEMB ad ejuſmodi ſuperficiem conoidicam in eadem ratione erit. Quod erat &c.

COROLL. I. Hac methodo innumeras diverſas areas planas eidem curvæ ſuperficiei conoidicæ in dicta ratione reſpondentes aſſignabimus, tot nimirum diverſis modis, quot variæ curvę CAS ad conſtructionem aſſumi poſſunt, imò & in vario ſitu collocari.

COROLL. II. Quodſi fiat curva CGH, cujus ſubnormales ſint ipſis BM æquales, probabitur, ut in ſuperioribus [*Coroll.* 7. & 8. *Theor XI.*] circulum radii BG æquari ſuperficiei conoidicæ ab OPN circa ON generatæ.

THEOREMA XIII.

Iſdem poſitis: ſit ſubtangens BD ad tangentem PY, ut conſtans quædam linea, putà OH, ad ordinatam BM; erit ſpatium CEMB æquale rectangulo data recta OH in curvam OP.

Erit enim, ut ſupra probavimus (*Theor. pręced.*) Bb. Pp:: BD.PY:: OH.BM, ergo rectangulum MBbm = OH in Pp, adeoque & area CEMB = OH in arcum OP. Quod erat &c.

COROLL. I. Pro varietate aſſumptæ curvæ CAS, diverſa ſpatia CEMB orientur, ſemper æqualia rectangulo ejuſdem OH in dictam curvam OP, adeoque & æqualia inter ſe.

COROLL. II. Vicissim dato spatio OVPN æquale rectangulum reperiemus, sub data OC, & arcu CM curvę alicujus contentum, cujus ope propterea spatium OVPN quadrabitur, idque aliter, quàm supra docuerimus *in Parergo Append.* 1. Si nempe, assumpta curva ad libitum CAS quam tangant CH, AH, fiat semper OC . PN :: BA — HC . ME, & describatur talis curva CM, cujus tangentes sint ejusmodi ME; Id quod tamen generatim absque quadraturis obtineri nequit, nisi in specialibus casibus, pro varia specie assumptæ curvæ CAS, subtangens cujus ad tangentem quæsitæ curvæ debet notam habere rationem constantis OC ad ordinatam PN.

THEOREMA XIV.

Inscripta sit curva CAS rectangulo COSD, expositis autem tribus rectis X, L, K in qualibet ratione proportionaliter decrescentibus, fiat K † X . 2L :: SO . OT :: SD . DF, & fiant curva CPT, CMF, illa ad axem CO, hac ad CD relata, ipsique CAS proportionaliter analoga; Item fiat K † X . X — K :: CO . OQ :: CD . DV, junctisque CQ, CV secantibus coordinatas AB, AN in R, E, *ducta*

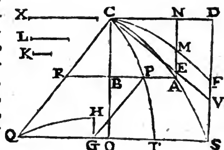
ducta P G parallela C Q, ordinetur G H = E M; erit punctum H ad curvam Q H æqualem curvæ C A.

SUmpta minima *K* pro unitate, & facta media L = n, erit tertia proportionalis X = nn; sit quoque CB = x, BA = y, QG = z, GH = u; erit ergo $nn + 1 . 2n$ :: SO. OT :: AB . BP :: $y . 2yn : (nn + 1)$ :: SD. DF :: AN. NM :: $x . 2xn : (nn + 1)$; quare BP = $2yn : (nn + 1)$ & N M = $2xn : (nn + 1)$; & quia CB . BR :: CO . OQ :: $nn + 1 . nn - 1$ :: CD . DV :: CN . NE, fiet NE = $[nn - 1]y : [nn + 1]$, & BR = $(nn - 1) x : (nn + 1)$; itaque RP, seu QG, ideft $z = (2yn + (nn - 1) x) : (nn + 1)$; & ME, seu GH ideft $u = (y[nn - 1] - 2xn) : [nn + 1]$; ergo $dz = (2n dy + (nn - 1) dx) : (nn + 1)$; & $du = (dy (nn - 1) - 2n dx) : (nn + 1)$ unde $dz^2 = [4nn dy^2 + 4n (nn - 1) dx dy + [nn - 1]^2 dx^2] : [nn + 1]^2$; & $du^2 = [dy^2 (nn - 1)^2 - 4n (nn - 1) dx dy + 4nn dx^2] : [nn + 1]^2$; ideoque $dz^2 + du^2 = (4nn + (nn - 1)^2, [dx^2 + dy^2] : [nn + 1]^2$ quod $= [dx^2 + dy^2], (4nn + n^4 - 2nn + 1) : (n^4 + 2nn + 1)$ ac denique, ob coeficienté numeratoris $(4nn + n^4 - 2nn + 1)$ æqualem denominatori $[n^4 + 2nn + 1]$, remanet $dz^2 + du^2 = dy^2 + dx^2$, & radix unius = radici alterius; sed prima est differentialis curvæ QH, altera verò differentialis curvæ C A, ut notum est, quare ipsæmet curvæ CA, QH, quarum differentiæ perpetuò æquantur, invicem pariter æquales fient. Quod erat &c.

COROLL. I. Pro varia ratione linearum X, L, aut L, K, manifestum est diversam speciem curvæ QH proditurам eidem datæ C A longitudine æqualem.

COROLL. II. Si curva C A sit geometrica, sive, ut loqui amant recentiores, algebratica, etiam QH geometrica, aut algebratica erit; Nam ejus coordinatæ z, & u datam rationem habent dependentem ex ratione ipsarum x, y, ita ut si hæc geometricè, aut algebraticè exprimi possit

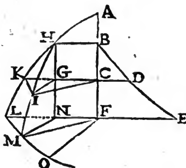
sit independenter à logarithmis, aut quadraturis, aut rectificatione curvarum, etiam illa pariformiter exponi queat æquatione, nullam quadraturam, nullum logarithmum, nullam curvę rectificationem involuente.



COROLL. III. Et cùm hęc ipsa curva QH rursus in alias pari methodo transformari possit, hoc etiam ex capite varia seges curvarum semper longitudine æqualium, sed specie differentium, & quidem semper geometricarum, suboritur.

THEOREMA XV.

Solidum ex figura ALF, circa axem AF rotata, productum secetur plano HNM, tum ad planum per axem ALF, tum ad basim circuli FLO perpendiculari, & sectio fiat curva HIM; sint autem rectangula GCD, NFE æqualia portionibus HIG, HMN prædictæ sectionis: dico, rectangulum ex eadem HB in curva portionem BD = figura KHBC.



Secetur enim rursus plano ad basim parallelo CKI, eritque IG quadratum cum quadrato GC æquale qua-

quadrato CI, seu CK, ob circulum, ideoque si ponatur HB = a, CK = z, CB = x, CD = y, erit GI = $\sqrt{(zz - aa)}$; cùm ergo ubique area HGI, seu $\int \sqrt{(zz - aa)}dx$, æquetur rectangulo GCD, ideft ay, erit differentiando $\sqrt{[zz - aa]}\, dx = a\,dy$, & quadrando, $zzdx^2 - aa\,dx^2 = aa\,dy^2$, ac per antithesim $zzdx^2 = aa\,dx^2 + aa\,dy^2$, ergo extrahendo radicem, $z\,dx = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, hoc est elementum areæ HBCK = rectangulo ex HB in elementum curvæ BD; unde integrando, area KHBC = HB in curvam BD. Quod erat &c.

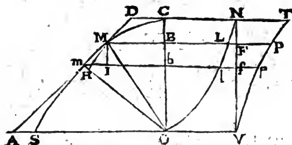
COROLL. I. Quoties ergo ordinata in elementum abscissæ æquatur constanti in elementum alterius curvę, puta $z\,dx = a\sqrt{[dx^2 + dy^2]}$ semper habetur $\sqrt{(zz - aa)}\,dx = a\,dy$, & summa ex dictis radicibus $\sqrt{(zz - aa)}$ in dx, divisa per a, dat ordinatam y curvæ rectificabilis per aream cujus primum elementum erat $z\,dx$, ut alias *in Parergo Append.* 1. innuimus.

COROLL. II. Eodem modo, sumpta quavis alia constanti b, si $\sqrt{[zz - bb]}\, dx$ æquetur b in elementum ordinatæ u, rursus habebitur $z\,dx = b$ in elementum curvę $\sqrt{(dx^2 + du^2)}$; adeoque si fiat primò $\sqrt{(zz - aa)}\,dx = a$ in elementum ordinatæ dy, tum secundò $\sqrt{[zz - bb]}\, dx = b$ in elementum ordinatæ du, tam curva prima in a, quàm curva secunda in b, erunt invicem, & eidem areæ $\int z\,dx$ æquales; proptereaque habebitur secunda curva, cujus ordinatæ u, ad curvam priorem, cujus ordinatæ y, in data ratione, constantis a prius assumptæ, ad alteram constantem b.

COROLL. III. Si LHA sit linea recta, solidum ex ipsa circa AF evadit Conus, & sectio HMN hyperbola, ex cujus ideo quadratura pendet constructio curvæ BDE quæ ducta in BH æquetur areæ trapezii rectilinei HLFB.

COROLL. IV. Similiter in plano (*ut in figura sequenti*) exposita quapiam figura CTVO cum adscripto rectangu-

lo

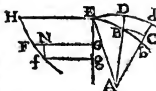


lo CNVO, si differentiæ quadratorum PB, BF ponatur æquale quadratum BL, ut oriatur curva NLO, & spatio CNLB semper fiat æquale rectangulum FBM, habebitur curva CMS, quæ ducta in NC æquabit spatium CTVO, ut eodem calculo constat; sicut vicissim, dato spatio CNLO, cujus portiones quælibet CNLB æquales fiant rectangulo CN in BM, & posito quadrato BP = aggregato quadratorum CN, BL, resultat spatium CTVO = rectangulo ex CN in curvam CMS.

COROLL. V. Cùm autem spatium CTVO infinitis modis (*per decem priora theoremata, eorumque corollaria*) in alias areas transformari possit, ejusque ordinatarum quadrata excedere queant quadratum constantis CN, dictisque excessibus æqualia poni quadrata aliarum ordinatarum, atque absolvi constructio Corollarii præcedentis, manifestum est, alias & alias curvas invicem, aut eidem datæ CMS (ex cujus tangentibus DA in BP ordinatis, *ex construct. propos. Append.* 1. ortum sit spatium CTVO) æquales innumeris modis construi posse, imo & fieri in data ratione, si pro constanti CN latere rectanguli CNVO, alia major aut minor in data ratione adhiberetur, juxta calculum Corollarii II.

THEO-

THEOREMA XVI.



*SI rami AB, A*b *desinentes in curvam EB*b *producantur in D*, d *ad arcum circularem ED*d *centro A descriptum, & superficies cylindrica, quæ prodiret ex quolibet ramo AB ad correspondens punctum D super eodem arcu perpendiculariter erecto, applicetur ad ipsummet radium AE, detque latitudinem EG, ad quam ordinetur GF = ramo AB, erit curva hinc orta HF*f *= curva primò proposita EB*b.

DUcatur eodem centro A arcus BC, occurrens in C ramo infinitè proximo A*bd*, fitque *gf* pariter infinitè proxima FG, atque *f*N axi EG parallela; Cùm ergo summa ex omnibus ramis EA, BA, *b*A normaliter super arcum ED*d* erectis æquetur rectangulo AE in E*g*, *ex constr.* erit portio correspondens ramis AB, A*b* infinitè proximis super arcu D*d* erectis, hoc est (ob infinitè exiguam differentiam) rectangulum AB in D*d* = AE in G*g*; ideoque AE . AB :: D*d*. G*g*; sed etiam :: D*d*. BC, ergo G*g*, vel *f*N = BC; sed & ordinatarum differentia FN = ramorum differentiæ *b*C, ergo F*f* potentia æqualis ipsis FN, N*f*, æquabitur B*b* pariter potentia æquali ipsis *b*C, BC; quare & tota curva HF*f* toti EB*b* æquabitur. Quod erat &c.

COROLL. I. Datæ curvæ EB*b* infinitis modis aliam diversam æqualem assignare licebit, prout aliud, atque aliud punctum A, sive intra, sive extra curvam eligemus pro centro arcus ED*d*.

COROLL. II. Sunt autem areæ AEB*b*, E*gf*FH, illa quidem involuta, hæc verò expansa (quales *Theor.* 8. expo-

 suimus)

ſuimus), unde poſterior ſemper eſt dupla prioris, nam parallelogrammum G N fg, & triangulum B A b habent baſes fg, A b æquales, *ex hypotheſi*, necnon pares altitudines f N, BC, ut jam probavimus, unde illud hujus eſt duplum. Confer dicta *Theor.* 8. *Coroll.* 4.

THEOREMA XVII.

F*Igura CEPN, cujus coordinatæ PB, PN, fiat reciproca CEPF, ſumptis ſemper PF, pf tertiis proportionalibus poſt ipſas PN,* pn, *& conſtantem CE, quæ ut radio deſcribatur arcus circularis ED*d, *ſitque area PECF = CED rectangulum, itemque area* p*EC*f *= CE*d *rectangulum, & ſic ſemper, junctiſque radiis CD, C*d *eodem centro C deſcribantur arcus BM,* b.m. *Erit curva EP*p *curvæ EM*m *æqualis.*

ESto EC $= a$, CB $= x$, ED $= z$, PB $= y$, Dd $= dz$, Hp $= dy$ erit PF $= aa:x$, ex conſtructione; ſed quia ſemper area PECF = rectangulo CED, ſeu dupla eſt ſectoris CDE, fit etiam, ut zona PpfF ſit ſemper = rectangulo CDd, ſeu dupla talis ſectoris; quare $aady:x = adz$, ſive $ady:x = dz$, ideoque $a.x::dz.dy::$ Dd.Im, ergo Im $= dy = p$H; ſed & MI $= Bb =$ PH, ergo Pp

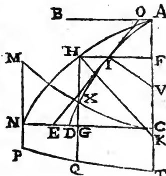
[poten-

[potentia æqualis utrique pH, PH] æquatur Mm (pariter potentia æquali ipsis Im, MI) unde & tota curva EPp toti EMm æquabitur. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc infinitis modis eadem curva EPp in aliam EMm æqualem transformari poterit, prout punctum C remotiùs, aut propiùs ad punctum E acceptum fuerit, unde varia magnitudo figuræ PECN, & diversa area EPFC priori reciproca ex hac constructione resultat, proindeque & diversa curva EMm, nunc contractior, nunc amplior evadit.

COROLL. II. Si linea EPp sit quadrans circuli habentis centrum C, adeoque sit continuatio quadrantis ED, erit EMm semicirculus subdupli radii, nam arcus ED evadet = EP, propter rectangulum CED = areæ quadrantis reciprocæ PECF = duplo sectoris CEP (*per cap. 8. Hugen. num. 6.*) = rectangulo CEP; unde CM = CB = sinui complementi arcus ED, aut EP.

THEOREMA XVIII.



Curvæ CXM, AID, TQP, AHN ita referantur, ut ducta ubilibet ordinata QGXH, & ad curvam AH perpendiculari HK, & ordinata HF occurrente in I curvæ AID, quam tangat OE parallelis CN, AB definita, sit semper quadratum KF ad quadratum FH, ut quadratum EO ad aggregatum quadratorum datæ AB, & ordinatæ GQ, spatio autem CTGQ sit æquale rectangulum ex data AB in GX. Erit curva MXC ad curvam AID, & quilibet arcus CX ad arcum correspondentem AI, in data ratione AC ad AB.

 Po-

Ponatur enim $AC = a$, $AB = b$, $AF = x$, $FI = u$, $FH = y$, $GX = z$, $EO = t$, $FK = p$, $GQ = q$; ergo, *ex hypothesi*, $pp \,.\, yy :: tt \,.\, bb + qq$; unde $bb + qq = yytt : pp$; & quoniam spatium CTGQ, seu summa ex omnibus $qdy = bz$, erit differentiando $qdy = bdz$, & quadrato $qqdy^2 = bbdz^2$, & ex superiori æquatione $qq = yytt : pp - bb$, ergo $ttyydy^2 : pp - bbdy^2 = bbdz^2$, & per antithesim $ttyydy^2 : pp = bbdz^2 + bbdy^2$; quare extrahendo radicem, $tydy : p = b\sqrt{(dz^2 + dy^2)}$; sed quoniam $p \,.\, y :: dy \,.\, dx$, seu $ydy : p = dx$, erit $tydy : p = tdx = b\sqrt{[dz^2 + dy^2]}$; at *per Append.* 1. OE applicata in F, seu tdx facit elementum spatii æqualis rectangulo datæ AC in curvam AID, adeoque $tdx = a\sqrt{(dx^2 + du^2)}$, ergo habebitur $a\sqrt{[dx^2 + du^2]} = b\sqrt{[dz^2 + dy^2]}$; & ideò $\sqrt{[dz^2 + dy^2]} \,.\, \sqrt{[dx^2 + du^2]} :: a \,.\, b$; nempe elementa curvæ CXM ad elementa curvæ AID sunt semper in eadem constanti ratione CA ad A*B*. Quod erat &c.

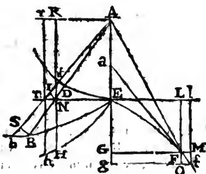
COROLL. I. Hinc patet, posse infinitis modis datæ curvæ AID aliam CXM in data ratione assignari, prout diversa curva AHN assumetur (cujus tamen ordinatæ HF ad correspondentes arcus datæ curvę AI sint in minori ratione, quàm sit ratio proposita AC ad A*B*) & facta deinde constructione, quæ in Theoremate supponitur, diversæ speciei curva CXM quæsito satisfaciens habebitur.

COROLL. II. Si supponatur A*B* = AC, facta eadem constructione, habebitur curva CXM = datę AID.

CO-

COROLL. III. Simili artificio, & parùm mutata constructione, resolvendo aream datę, vel assumptę curvę in arcus concentricos, aliæ & alię curvæ construi possent vel æquales vel juxta rationem præscriptam correspondentes datæ curvæ; nec quidpiam facilius, quàm ad exemplum præcedentium Theorematum alia, & alia innumera similis commatis invenire, ac demonstrare; duo tamen adhuc subjungere non gravabor.

THEOREMA XIX.



Curvæ E B b, E F f *ita referantur, ut ex quodam fixo puncto A eductis ad priorem ramis* A B, A b, *secantibus rectam positione datam* EN *in* N, n, *ac per hæc puncta ordinatis* RNH, r n h, *quæ sint ad ramos* B A, b A, *ut quadratum* A E *ad quadratum* A N, *vel* A n, *sit semper spatium* R A E H = AEG *rectangulo, & spatium* r A E h = *rectangulo* A E g; *centro autem* E *ducto arcu circulari* E D d, *sint ordinatæ* G F, g f *ipsis* D B, d b *æquales; Dico etiam curvas* E B, E F *invicem coæquari.*

SUpponantur E B, E b, & reliquę hinc pendentes lineæ, fieri infinitè proximæ; eritque spatium elementare R H h r = A E in G g; unde R H . A E :: G g . N n; sed, *ex hypothesi*, B A . R H :: N A q. A E q. sive [ut alibi probatum est, *par.* 1. *de Circ. prop.* 9.] :: N n . D d; ergo ex æquo perturbatè, B A . A E :: G g . D d; sed & B A . AE :: B S . D d; ergo B S = G g = F O; ipsi autem S b differen-

rentiæ interceptarum BD, æquatur Of differentiæ ordinatarum GF; ergo & $Bb = Ff$, cum sint hypothenusæ similium, & æqualium triangulorum BSb, FOf; quare & tota curva EBb = curvæ EFf; Quod erat &c.

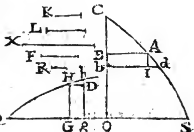
COROLL. I. Hinc data curva qualibet EBb, poterit infinitis modis alia EFf huic æqualis reperiri, sumpto ad arbitrium quolibet puncto A, ex infinitis quæ assignari possunt, & facta constructione, quæ in Theoremate supponitur, donec oriatur prædicto modo curva EFf, quæ rursus infinitis modis in alias transformabitur, ductis ex quolibet puncto, veluti a, ramis aF, ac repetita simili constructione.

COROLL. II. Si fuerint continuè proportionales AE, AN, AB, fiet AEq. ad ANq. (sive RH ad AB) ut AE, vel RN ad AB; ergo RN = RH, & curva HE congruit rectæ NE, & spatium RAEH (quod = AEG rectangulo) congruit rectangulo RAEN; itaque EN = EG = FL; quia verò in hoc casu BAD (seu BDA † DAq.) = NAq. = NEq. † AEq., ablatis DAq. AEq. æqualibus, fit BDA = NEq. unde & GF, seu EL in EA = FLq. Ergo EFf parabola est [concavitate tamen ad axem EL obversa] cujus parameter AE. Quod ipsum jam indicaveram *in Hugenianis pag.* 197. curvam scilicet, in quam desinunt rami tertio loco proportionales post radium, & secantem, posse cum parabolica curva comparari.

COROLL. III. Proposito spatio quadrabili HEN, licebit infinitas curvas æquales determinare; sumpto quippe puncto quolibet A, & completo rectangulo adjacente eidem spa-

ſpatio NEAR, junctaque NA, fiat ut AEq. ad ANq. ita RH ad aliam R*B*, & ſpatio quadrabili RAEH applicato ad AE, fiat latitudo EG, ſitque ordinata GF = *B*D, ideſt exceſſui rami A*B* ſupra AE; fiet curva EF = curvę E*B*.

THEOREMA XX.



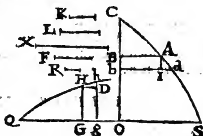
EXpoſitis quibuſvis numeris, aut lineis K, L, X triangulum rectangulum conſtituentibus, cujus alterum latus K ponatur = 1, alterum L = n, adeoque hypothenuſa X = $\sqrt{(nn + 1)}$ = g; dataque curva CAS, cujus abſciſſa CB = x, ordinata BA = y, ſi huic altera curva QHh ita reſpondeat, ut abſciſſa QG accepta = $z = y : g - nx : g$, ordinata GH evadat = $m = ny : g + x : g$; Erunt curvę CA, QH invicem æquales.*

Erit enim quadratum ipſius G*g*, ſive HD differentię axis, ideſt $dz^2 = dy^2 : gg - 2ndydx : gg + nndx^2 : gg$; & quadratum differentiæ ordinatæ *b*D, hoc eſt $dm^2 = nndy^2 : gg + 2ndydx : gg + dx^2 : gg$; ergo quadratum elementi curvæ H*b*, ideſt $dz^2 + dm^2 = (nn + 1), (dx^2 + dy^2) : gg$; ſed ex hypotheſi $nn + 1 = gg$, unde $(nn + 1) : gg = 1$, ergo fiet $dz^2 + dm^2 = dx^2 + dy^2$ = quadratis AI, & I*a*, ſeu quadrato elementi A*a* curvę CA: Ex quo liquet propoſitum.

COROLL. I. Pro varietate trium propoſitorum K, L, X, numerorum aut linearum, infinitis modis variabitur curvæ QH priori æqualis conſtructio.

CO-

COROLL. II. Si curva CAS sit algebraica, etiam QH talis erit, nam ejus coordinatæ z, m determinantur per ipsas coordinatas prioris x, y, & per datas lineas K, L, X.



CONCLUSIO.

INnumeræ itaque habentur solutiones *Problematis Bernoulliani*, quod ab initio hujus Appendicis proposui; & quidem, tum generatim inveniendo Curvam datæ æqualem, sive algebratica sit, sive non; tum verò etiam determinatè itaut, si data curva sit algebratica, etiam alia talis resultet. Hoc quidem postremum speciatim docetur *Theorem.* 14. & 20. ut in eorum Corollariis notavimus; illud verò primum in omnibus reliquis post duodecimum occurrentibus Theorematibus, eorumque corollariis præstari posse innumeris modis, qui ex doctrina præcedentium omnium propositionum, ad transformationem superficierum spectantium, infinitam rursus varietatem suscipiunt, abundè docuimus; Quamquàm & nonnulla alia huc pertinentia jam fuerant à nobis ante vulgata *in Epist. Geometr. ad Th. Cevam* ubi *num.* 19. modum attuli, quo data qualibet figura, à curva linea, & recta illam subtedente comprehensa, cylindrus inveniatur, cui illa ita circumvolvi possit, ut nihilominus talis curva linea in uno plano jaceat, sitque ejusdem cylindri transversa sectio: quemadmodum ex cylindro super Cycloide erecto sectio transversa habetur æqualis datæ parabolæ, quæ eidem cylindro advolvitur, ut ibi demonstravimus; Et ex cylindro super Tractoria erecto sece-

secatur Logarithmica; ac generatim, si relatio ordinatarum ad axem, mutetur in relationem ordinatarum ad curvam, ex cylindro super posteriori curva excitato secabitur ungularis superficies, desinens in curvam priorem, quę diversa partium suarum positione jacebit in plano secante: idque ex methodo tangentium inversa facilè deducitur, tantùm enim curva determinanda est, cujus tangens = subtangenti prioris curvę datę, ut hęc ex illius cylindro abscindi queat; idque infinitis modis haberi potest, pro varia axis assumpti longitudine, & positione, ejusque proportionali sectione cum axe curvę datę. Similiter, translata figura data in quamlibet cylindricam superficiem (vel etiam in Conicam rectam, ut aliàs docui *in eadem Epist. Geom. n.* 7.) ac perpendicularibus ex quolibet ejus curvę sic complicatę puncto in aliquod planum [per axem, aut diametrum, aut ordinatam quamlibet basis cylindricę, aut conicę, qua libuerit inclinatione, traductum, vel aliud huic parallelum] demissis, generabitur cylindrica quędam superficies, quæ in planum expansa curvam exhibebit diversæ naturæ, sed priori adamussim æqualem.

Sed cùm non semper hoc modo res geometricè expediri queat, binis dumtaxat modis infinitas hujus Bernoulliani Problematis solutiones dictis Theorematibus 14, & 20 proposuisse, ac demonstrasse contentus ero, quæ Craigianæ, & Bernoullianæ solutioni, *in Actis Lypsiæ* 1705. *Mensib. Aprilis, & Augusti*, dudum publicatæ adiungi fortasse merentur, si quæ illi postulant, vel assumunt, cum nostris constructionibus conferantur.

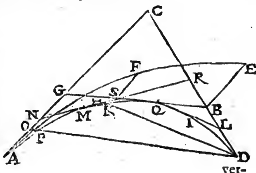
Nimirum in solutione Craigii monetur, *ut pro* d z *talis assumatur valor ex* u, du, *& determinatis compositus, ut valores quantitatum* d x, d y *sint summabiles*; quam conditionem D. Bernoullius æquè difficilem, aut fortè difficiliorem ipso Problemate pronunciat, unde suam ipse subdit, à motu quodam *obreptionis, & subreptionis*, quem idem Vir

S Cl.

Cl. ingeniosè excogitavit, pendentem, cui & duo Postulata prę̨mittit, quorum secundum est, *Curvam algebraicam in partes quotcunque æquè amplas secari posse*, eo sensu, ut extremę sectarum partium normales angulos æquales contineant: id quod satis difficilis indaginis non nemini videbitur, cùm prę̨ter sectiones conicas, in quibus *ex prop.* 50. *lib.* 2. *Apollonii* constat modus id exequendi, in aliis curvis non statim sese obviam proponat praxis, & methodus dictæ sectionis, ut non postulandam, sed indicandam, ac demonstrandam quis prę̨sumere posset; unde & aliquam in praxi molestiam id quandoque allaturum fatetur ipse Bernoullius *dictorum Actorum pag.* 359.

Quidsi ergo independenter ab ejusmodi motibus obreptoriis, aut subreptoriis, quos veteres Mathematici ad geometricam Problematum solutionem ægrè admisissent, & absque prædicto Postulato secundo, per solam inventionem verticis datæ curvæ (qui habetur ex maxima, aut minima ordinata ad rectam positione datam, per methodos jam vulgatas) doceat quis modum geometricè determinandi puncta singula Curvarum motu obreptorio, vel subreptorio genitarum, nonne operæ aliquod pretium futurum esset? Id nos jam sequenti constructione præstitisse confidimus, ex qua alii infiniti modi ad solvendum Bernoullianum Problema deduci possunt.

Esto igitur curva data AMD, cujus extremæ tangentes AC, DC in punctum C conveniant. Posita ipsi DC = CO, jungatur DO, secans curvam in P, & portionis P M D



ver-

vertex sit Q (in quem scilicet incideret maxima ordinata curvæ ad positione datam DP) eritque tangens GQB ipsi DP parallela, adeoque ad priores tangentes æqualiter inclinata : ordinetur jam BE parallela AC, longitudine æqualis ipsi BD: mox rursus ducta quavis alia curvę tangente MR, ad punctū M ipsis A, & Q interpositum, ponatur similiter DR = RH, & juncta DH secet curvam in K; tum portionis DQK determinetur vertex I, sitque IL tangens curvæ in I, quæ ad utramque tangentem DR, MR æque inclinabitur, & facta tangentis alterius portione MS = IL, ordinetur parallela eidem AC recta SF = LD; eademque methodo alia similia puncta F determinentur. Perspicuum est, curvam AFE per hæc puncta incedentem, eandem ipsam esse, ac quæ per motum obreptionis curvę QD super ęquè amplam AMQ, à D. Bernoullio describitur; itaque erit illa algebraica, perinde ac data AMD, atque huic prorsus ęqualis. Quodsi ad contrarias partes constructio fieret, nempe à Q versùs G secaretur = QB, & ab M versùs N sumeretur = MS vel IL, atque ad inferiores partes ibidem ordinarentur BE, SF æquales ipsis BD, LD, orirerur curva æqualis differentię curvarum AMQ, & QID, quam motu subreptionis Vir Cl. designat; unde si supponatur data QID, posita QMA ejus dupla [per duplicationem ramorum ab eodem puncto, velut B, exeuntium, & ad curvam pertingentium], orietur hac arte nova curva = eidem datæ QID; Quod erat inveniendum.

FINIS.

DEO VERITATIS GLORIA.

Quis leget hæc? Min' tu istud ais? Nemo Hercule. Nemo?
Vel duo, vel nemo: turpe, & miserabile. Quare?
A. Persius Sat. 1.

AP-

APPROBATIONES.

NOS D. DAMASCENUS DE MUTIIS

Abbas SS. Hippolyti, & Laurentii de Faventia, & totius Camaldulensis Ordinis Generalis.

CUM opus inscriptum *Quadratura Circuli, & Hyperbola &c.* P. D. Guidonis Grandi in Pisano Atheneo Lectoris, & nostræ Congregationis Monachi, aliquot ex eadem Congregatione S. Th. Magistri, quibus id commissum fuit, recognoverint, & in lucem edi posse probaverint, facultatem facimus, ut Typis mandetur, si iis, ad quos spectat, videbitur. Datum Faventiæ ex nostro Monasterio SS. Hippol. & Laur. die 8. Aprilis 1703.

D. Damascenus de Mutiis Abbas Gener. Camald.

Loco ✠ Sigilli.

D. Marius Felix Ferrari Cancell.

Imprimatur. Annibal de Lanfranchis Chicchuli Canon. & Vicar. Gener.

Imprimatur. Cancell. S. Off. Pisarum.

Reimprimatur. Ant. Franc. Palmerini Vic. Gen.

Reimprimatur. Inquisit. Gen. S. Off. Pisarum.

Additiones *Imprimant.* Ant. Franc. Palmerini V. Gen.

Additiones *Imprimant.* Vic. Gen. S. Off. Pis.

